

الرياضيات
السادس العلمي
المفيد في ثلاثية
حيدر وليد
2019
MATHEMATICS
التطبيقي
07701780364
الجزء الاول
WWW.iQ-RES.COM
@iQRES
قناتنا على التلي كرام
موقع طلاب العراق
الفصل الاول
الأعـداد المركبـة
الفصل الثاني
القطوع المخروطية
WWW.iQ-RES.COM
موقع طلاب العراق
طبعة المغرب
بغداد - السعدون
بغداد - المتنبي
07702729223

# السادس العلمي

# التطبيقي

2019

## المفيد في ثلاثية

# حيدر وليد

07701780364

طبعة ثانية
مصححة
ومنقحة




عند اقتناء ملزمتك من دار المغرب
تأكد من وجود
( الجلدة المدورة اللاصقة )
في وجه الغلاف غير ذلك تعتبر مزورة

الجزء الاول

WWW.iQ-RES.COM

الموقع التعليمي الاول على مستوى العراق

( ... شارك رابط موقعنا ... )

مع اصدقائك لتعم الفائدة

ولا تنسونا من صالح دعائكم










كل ما ينشر في موقعنا من محتوى هو مجاني ولخدمة الطالب العراقي

© WWW.iQ-RES.COM

# الفصل الاول

## مدخل الى موضوع

# الأعداد المركبة



## مدخل الى موضوع الاعداد المركبة

نعلم ان الجذور التربيعية للاعداد الموجبة هي :

$$\sqrt{1}=1 \quad , \quad \sqrt{9}=3 \quad , \quad \sqrt{25}=5 \quad , \quad \sqrt{100}=10$$

اي هناك قيمة لعدد موجب تحت الجذر التربيعي .

ولكن :

$\sqrt{-16}=?$ → 4 (خطأ) ، −4 (خطأ)

$\sqrt{-9}=?$ → 3 (خطأ) ، −3 (خطأ)

إذن لا توجد قيمة حقيقية لعدد سالب تحت الجذر التربيعي .

أو جذر دليله زوجي مثل: $\sqrt[6]{\ }$ , $\sqrt[4]{\ }$ , $\sqrt[8]{\ }$ ... الخ .

**لذلك:**

نفرض ان هناك قيمة لعدد سالب تحت الجذر التربيعي هو (i)

$$\sqrt{-1}=i \quad \Rightarrow \quad i^2=-1$$

وبتربيع المعادلة الاخيرة

$$i^4=1$$

**خلاصة:** حفظ

$$\boxed{i^2=-1}$$

$$\boxed{i^4=1}$$

$$i^3=(i^2)(i)$$

$$i^3=(-1)(i)$$

$$\boxed{i^3=-i}$$

**إستراحة شعرية:**

ما مرّ ذُكركَ إلّا وابتسمتُ له
كأنك العيد والباقون أيامُ
أو هام طيفك إلا طرتُ اتبعهُ
أنتَ الحقيقة والجُلّاسُ اوهامُ

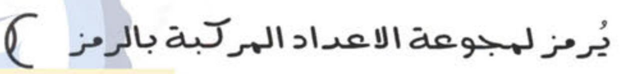
### كيف نكتب عدد سالب تحت الجذر التربيعي بدلالة (i):

| | | |
|---|---|---|
| $\sqrt{-36} = \sqrt{36}\,.\,\sqrt{-1}$<br>$= 6i$ | $\sqrt{-25} = \sqrt{25}.\sqrt{-1}$<br>$= 5i$ | $\sqrt{-16} = \sqrt{16}.\sqrt{-1}$<br>$= 4i$ |
| $\sqrt{-20} = \sqrt{20}\,.\,\sqrt{-1}$<br>$= \sqrt{5\times4}\ (i) = 2\sqrt{5}i$ | $\sqrt{-18} = \sqrt{18}\,.\,\sqrt{-1}$<br>$= \sqrt{9\times2}\ (i) = 3\sqrt{2}i$ | $\sqrt{-12} = \sqrt{12}\,.\,\sqrt{-1}$<br>$= \sqrt{4\times3}\ (i) = 2\sqrt{3}i$ |

### تعريف:

**العدد المركب:** هو العدد الذي يكتب بصيغة $(a+bi)$ حيث يسمى :

- **a** جزؤه الحقيقي
- **b** جزؤه التخيلي $\qquad a, b \in R$


يُرمز لمجوعة الاعداد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$

موقع طلاب العراق

* تسمى الصيغة $a+bi$ الصيغة العادية للعدد المركب .
أو الصيغة الجبرية للعدد المركب .

WWW.iQ-RES.COM

* يمكن كتابة العدد المركب بشكل زوج مرتب $(a \text{ ، } b)$ وتسمى الصيغة الديكارتية للعدد المركب .

| الجزء التخيلي | الجزء الحقيقي | الصيغة الديكارتية | العدد المركب الصيغة الجبرية |
|---|---|---|---|
| $3$ | $2$ | $(2\ ,\ 3)$ | $2 + 3i$ |
| $-3$ | $-2$ | $(-2\ ,\ -3)$ | $-2 - 3i$ |
| $-1$ | $\sqrt{3}$ | $(\sqrt{3}\ ,\ -1)$ | $\sqrt{3} - i$ |
| $2$ | $0$ | $(0\ ,\ 2)$ | $2i$ |
| $0$ | $3$ | $(3\ ,\ 0)$ | $3$ |

$\rightarrow\ 2i = 0 + 2i$

$\rightarrow\ 3 = 3 + 0i$

## قوى (i)

عند تبسيط $i^n$ نقسم الأس على 4 وكما في الصيغة التالية :

$$i^n = \{ i \ , \ -i \ , \ 1 \ , \ -1 \}$$

الباقي =1 ، الباقي =3 ، الباقي =0 ، الباقي =2

$$i^n = \left(i^4\right)^{\text{ناتج القسمة}} \cdot (i)^{\text{باقي القسمة}}$$

**مثال** بسط ما يلي :

1) $i^{25} = \left(i^4\right)^6 \cdot (i)^1$

ناتج القسمة على (4) ، باقي القسمة

$= (1)^6 \ . \ i = i$

2) $i^{58} = \left(i^4\right)^{14} \ . \ i^2$

$= (1)^{14} \ . \ i^2 = 1 * -1 = -1$

3) $i^5 = \left(i^4\right)^1 \ . \ i$

$= 1 \ (i) = i$

4) $i^6 = \left(i^4\right)^1 \ . \ i^2$

$= (1) \ (-1) = -1$

5) $i^{999} = \left(i^4\right)^{249} \ . \ i^3$

$= (1)^{249} \ (-i) = -i$

6) $i^{4n+1} = \left(i^4\right)^n \ . \ i$

$= (1)^n \ . \ i = i$

ناتج $i^n$ هو:

$\{i \ , \ -i \ , 1 \ , \ -1\}$

**سؤال إضافي** جد ناتج :

$i^{6n+1} = \left(i^6\right)^n \ . \ i$

$= (-1)^n \ i$

عندما $n =$ عدد زوجي

$(-1)^n = 1 \Rightarrow i^{6n+1} = i$

عندما $n =$ عدد فردي

$(-1)^n = -1 \Rightarrow i^{6n+1} = -i$

**ملاحظة**

إذا كان الاس سالب ينزل للمقام ونغيّر الاشارة ثم نبسّط كما سبق وبعدها نضرب الكسر بـ ( $i^4$ ) حيث $i^4 = 1$ أي لا نأثر على الكسر (يُعتبر الضرب في واحد) .

**8** $i^{-13}$

$$= \frac{1}{(i^4)^3\ i} = \frac{1}{i}(i^4)$$

$$= i^3 = -i$$

**7** $i^{-17}$

$$= \frac{1}{i^{17}} = \frac{1}{(i^4)^4 . i} = \frac{1}{i}(i^4)$$

$$= i^3 = -i$$

**اتفاق**

كل سؤال في أي موضوع في هذا الفصل عندما نرى $i$ مرفوعة إلى الاس نقوم بتبسيط ($i$) قبل التفكير بأي شيء مهما كان السؤال (ونبسّط كما في الطريقة السابقة) .

Notes:

# العمليات على مجموعة الأعداد المركبة

في مجموعة الأعداد المركبة يوجد عمليات رياضية كالتي مرت عليك (الجمع – الطرح – الضرب – القسمة – الجذور التربيعية والتكعيبية – النظير الجمعي والضربي ... الخ) وسنتطرق إليها بالتفصيل .

**أولاً: عملية الجمع:** عند جمع عددين مركبين نجمع الجزء الحقيقي مع الجزء الحقيقي والجزء التخيلي مع الجزء التخيلي وبحسب الاشارة .

**مثال**

جد مجموع العددين المركبين في كل مما يأتي :

**1** $(3 + 4i) + (2 + 5i)$

$(3+2) + (4i + 5i) = 5 + 9i$

**2** $(5+7i)+(-3-9i)$

$(5-3) + (7i - 9i) = 2 - 2i$

**3** $(-7 + 2i) + (2 - 5i)$

$(-7 + 2) + (2i - 5i) = -5 - 3i$

**4** $\left(3 + 4\sqrt{2}\, i\right) + \left(-3 - 2\sqrt{2}\, i\right)$

$(3-3) + \left(4\sqrt{2}\, i - 2\sqrt{2}\, i\right) = 0 + 2\sqrt{2}\, i$

**5** $3 + 2 - 5i$

$(3 + 0i) + (2 - 5i)$

$(3 + 2) + (0i - 5i) = 5 - 5i$

**6** $\left(\frac{5}{2} - i\right) + \left(\frac{1}{5} + 2i\right)$

$\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{5}\right) + (-i + 2i)$

$\frac{27}{10} + i$

**ثانياً: عملية الطرح:** عند الطرح يتم توزيع اشارة السالب على القوس ثم نجري عملية الجمع أو الطرح بحسب الاشارات .

**مثال**

جد ناتج ما يأتي :

**1** $(7-13i)-(9+4i)$

$(7-13i)+(-9-4i)$

$(7-9)+(-13-4i)=-2-17i$

**2** $(5+3i)-(2-4i)$

$(5+3i)+(-2+4i)$

$(5-2)+(3i+4i)=3+7i$

**3** $\left(3\sqrt{2}+\sqrt{5}\,i\right)-\left(\sqrt{2}+3\sqrt{5}\,i\right)$

$\left(3\sqrt{2}+\sqrt{5}\,i\right)+\left(-\sqrt{2}-3\sqrt{5}\,i\right)$

$\left(3\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{5}i-3\sqrt{5}\,i\right)=2\sqrt{2}-2\sqrt{5}\,i$

**4** $3-(5-3i)$

$(3+0i)+(-5+3i)$

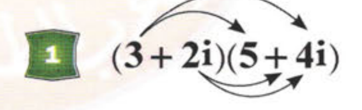
$(3-5)+(0i+3i)=-2+3i$

**ثالثاً: عملية الضرب:** عند ضرب عددين مركبين نوزع الاقواس . هنا تذكّر أن $(i^2=-1)$ .



جد ناتج ما يأتي :

**1** $(3+2i)(5+4i)$



$15+12i+10i+8i^2$

$15+22i-8=7+22i$

(( $i^2$ تعكس اشارة ما قبلها و تحذف ))

**2** $(2-3i)(3+5i)$

$6+\underbrace{10i-9i}_{\text{طرح}}-15i^2$

((نعكس الاشارة وتحذف))

$6+i+15=21+i$

**3** $(10+3i)(0+6i)$

$0+60i+0i+18i^2=-18+60i$

((نعكس))

**4** $(2+3i)(-3+5i)$

$-6+10i-9i+15i^2$

$-6+i-15=-21+i$

**5** $i(1+i)=i+i^2=-1+i$

**6** $\frac{-5}{2}(4+3i)=\left(\frac{-5}{2}\times 4\right)+\left(\frac{-5}{2}\times 3i\right)$

$=-10-\frac{15}{2}i$

زوروا موقعنا للمزيد
WWW.iQ-RES.COM
موقع طلاب العراق



**رابعاً: عملية القسمة:** قبل التطرق الى القسمة يجب التعرف على مُرافق العدد المركب.

مُرافق العدد المركب:
هو عكس اشارة الجزء التخيلي للعدد المركب فقط. نرمز له بالرمز $\overline{C}$ .

$$C = a + bi \Rightarrow \overline{C} = a - bi$$

$$C_1 = 2 + 3i \rightarrow \overline{C_1} = 2 - 3i$$

$$C_2 = 4 + 5i \rightarrow \overline{C_2} = 4 - 5i$$

$$\overline{1 + i} = 1 - i$$

**أنتبه !**

$$\begin{cases} C_1 = -3 + 4i \\ C_2 = 3 - 4i \end{cases}$$
غير مترافقات لأن اشارة الجزء الحقيقي تغيرت أيضاً.

$$\begin{cases} C_1 = (3i - 5) \\ C_2 = (-3i - 5) \end{cases}$$
العددان مترافقان لأن اشارة الجزء التخيلي هي فقط التي تغيرت والاختلاف فقط في الترتيب.

عند ضرب عددان مترافقان فيكون الناتج: $(C . \overline{C} = a^2 + b^2)$

$^2$(الحقيقي) + $^2$(التخيلي)

**1** $(2 + 3i)(2 - 3i) = 2^2 + 3^2$
$= 4 + 9 = 13$

**أنتبه !** الجزء التخيلي بدون i فقط الرقم نأخذه

**2** $(1 - i)(1 + i) = (1)^2 + (1)^2 = 2$

**أنتبه !** الجزء التخيلي بدون i فقط الرقم

**3** $(-2 + i)(-2 - i) = (-2)^2 + (1)^2$
$= 4 + 1 = 5$

**أنتبه !** الجزء التخيلي بدون i فقط الرقم

* عند وجود البسط والمقام في الاعداد المركبة نضرب البسط والمقام في مرافق العدد المركب الموجود في المقام .

ممنوع (i) بالمقام i مقام = مرافق

$$\frac{\text{مرافق المقام}}{\text{مرافق المقام}} \times \frac{\text{بسط}}{\text{مقام } (i)}$$

**مثال** جد ناتج ما يأتي بصيغة $a + bi$

**1**
$$\frac{3+4i}{3-4i} = \frac{3+4i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i}$$
((مترافقات))
$$= \frac{9+12i+12i+16i^2}{(3)^2+(4)^2} \quad (16i^2 = -16)$$
$$= \frac{-7+24i}{25} = \frac{-7}{25} + \frac{24}{25}i$$

**2**
$$\frac{2-i}{3+4i} = \frac{2-i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i}$$
$$= \frac{6-8i-3i+4i^2}{(3)^2+(4)^2} \quad (4i^2 = (-4))$$
$$= \frac{2-11i}{25} = \frac{2}{25} - \frac{11}{25}i$$

**3**
$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}$$
$$= \frac{1+i+i+i^2}{(1)^2+(1)^2} = \frac{2i}{2} = i$$
$$= 0 + i$$

**4**
$$\frac{1+2i}{-2+i} = \frac{1+2i}{-2+i} \cdot \frac{-2-i}{-2-i}$$
$$= \frac{-2-i-4i-2i^2}{(-2)^2+(1)^2} \quad (-2i^2 = +2)$$
$$= \frac{-2-5i+2}{5} = \frac{-5i}{5} = 0 - i$$

**5**
$$\frac{12+i}{i} = \frac{12+i}{i} \cdot \frac{-i}{-i}$$
$$= \frac{-12i-i^2}{0+1} = \frac{1-12i}{1}$$
$$= 1 - 12i$$

**6**
$$\frac{i}{2+3i} = \frac{i}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i}$$
$$= \frac{2i-3i^2}{(2)^2+(3)^2}$$
$$= \frac{3+2i}{13} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$$

**8** $Z=\dfrac{7+\sqrt{3}i}{1+2\sqrt{3}i}$

$$Z=\frac{7+\sqrt{3}i}{1+2\sqrt{3}i}\cdot\frac{1-2\sqrt{3}i}{1-2\sqrt{3}i}$$

$$Z=\frac{7-14\sqrt{3}i+\sqrt{3}i+6}{1+12}=\frac{13-13\sqrt{3}i}{13}$$

$$Z=\frac{13}{13}-\frac{13\sqrt{3}}{13}i=1-\sqrt{3}i$$

**7** $Z=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}$

$$Z=\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}\cdot\frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$$

$$Z=\frac{1-\sqrt{3}i-\sqrt{3}i-3}{1+3}=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}$$

$$Z=\frac{-2}{4}-\frac{2\sqrt{3}}{4}i=\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

## خامساً: النظير الضربي: هو مقلوب العدد المركب $\dfrac{1}{C}$ أو $C^{-1}$

**مثال** جد النظير الضربي لعدد $C=2-2i$ وضعه بالصيغة العادية للعدد المركب.

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{2-2i}\cdot\frac{2+2i}{2+2i}=\frac{2+2i}{2^2+2^2}=\frac{2+2i}{8}=\frac{2}{8}+\frac{2}{8}i$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$$

## سادساً: النظير الجمعي: هو عكس العدد المركب في الاشارة $(-c)$.

$C=2+3i \rightarrow -C=-2-3i$

$C=3+7i \rightarrow -C=-3-7i$

$C=3+i \rightarrow -C=-3-i$

$C=-2+2i \rightarrow -C=2-2i$

$\rightarrow$ مجموع عدد مركب ونظيره الجمعي = صفر




إستراحة شعرية

متى ستعرف كم اهواك يا أملاً
ابيع من اجله الدنيا وما فيها
لوتطلب البحر في عينيك اسكبهُ
أو تطلب الشمس في كفيك ارميها

# القوس المرفوع إلى الاس

**أولاً:** إذا كان القوس $(a+bi)^2$ نفتح القوس مربع حدانية .

**ثانياً:** إذا كان القوس $(a+bi)^3$ نجزء القوس $(\quad)^1(\quad)^2$ نفتح التربيع مربع حدانية ثم نضرب الناتج بالقوس الثاني .

**ثالثاً:** إذا كان القوس $(a+bi)^4$ يصبح $\left[(a+bi)^2\right]^2$ ثم نفتح القوس مربع حدانية والناتج أيضاً مربع حدانية .

**رابعاً:** القوى الاكبر :

$$(a+bi)^n =$$

n زوجي ← $\left[(a+bi)^2\right]^{\frac{n}{2}}$ ← مربع الحدانية

n فردي ← $\left[(a+bi)^2\right]^{\frac{n-1}{2}} . (a+bi)^1$ ← مربع الحدانية

**خامساً:** إذا كان لدينا $\left(\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}\right)^n$ .

1. نتخلص من البسط والمقام بالدرجة الأولى (نضرب داخل القوس في المرافق) .
2. بعد وضع داخل القوس بصيغة a+bi نفتح الاس بحسب السؤال . (راجع مثال رقم 6 في صفحة 15 والسؤال الثاني في صفحة 18) .

## مثال 1

ضح بصورة $a + bi$

((نفتح التربيع مربع حدانية)) $(3 + 4i)^2$

$i^2$ تحذف وتعكس اشارة ما قبلها

$$(3+4i)^2 = 9+24i+16i^2$$

$$= -7+24i$$

## مثال 2

ضح بالصيغة العادية للعدد المركب:

$$(2+3i)^2 + (12+2i)^2$$

$$(4+12i+9i^2) + (144+48i+4i^2)$$

$$4+12i-9 + 144 + 48i-4$$

$$(4-9+144-4) + (12i+48i) = 135+60i$$

حقيقي تخيلي

## مثال 3

ضح بصورة $a + bi$

$$(1+i)^2 + (1-i)^2$$

$$(1+2i+i^2) + (1-2i+i^2)$$

$$(\cancel{1}+2i-\cancel{1}) + (\cancel{1}-2i-\cancel{1}) = 0+0i$$

## مثال 4

ضح بصورة $a + bi$

$$(1+i)^4 - (1-i)^4$$

$$\left[(1+i)^2\right]^2 - \left[(1-i)^2\right]^2$$

$$(\cancel{1}+2i-\cancel{1})^2 - (\cancel{1}-2i-\cancel{1})^2$$

$$(2i)^2 - (-2i)^2$$

$$4i^2 - 4i^2 = 0 + 0i$$

## مثال 5

ضح بالصيغة العادية للعدد المركب:

$$(1+i)^3 + (1-i)^3$$

$$(1+i)^2(1+i) + (1-i)^2(1-i)$$

$$(\cancel{1}+2i-\cancel{1})(1+i) + (\cancel{1}-2i-\cancel{1})(1-i)$$

$$2i(1+i) - 2i(1-i)$$

$$\cancel{2i}+2i^2-\cancel{2i}+2i^2 = 4i^2 = -4 + 0i$$

## مثال 6

ضح بالصيغة الجبرية للعدد المركب $\left(\frac{3+i}{1+i}\right)^3$:

$$\left(\frac{3+i}{1+i}\right)^3 = \left(\frac{3+i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}\right)^3$$

$$= \left(\frac{3-3i+i-i^2}{(1)^2+(1)^2}\right)^3 \quad (i^2 = -1)$$

$$= \left(\frac{4-2i}{2}\right)^3 = \left(\frac{4}{2}-\frac{2}{2}i\right)^3$$

$$= (2-i)^3 = (2-i)^2(2-i)$$

$$= (4-4i-1)(2-i)$$

$$= (3-4i)(2-i) \quad \text{توزيع}$$

$$= 6-3i-8i-4$$

$$= 2-11i$$

مثال

إثبت أن :

$$(1-i)(1-i^2)(1-i^3)=4$$

$$\text{الطرف الأيسر} = (1-i)(1+1)(1-(-i))$$

$$=2(1-i)(1+i)$$

مترافقان

$$=2(1^2+1^2)$$

$$=2(2)=4=\text{الطرف الأيمن}$$

تذكّر

$i^2=-1$
$i^3=-i$

مثال

إثبت أن :

$$\frac{1}{(2-i)^2}-\frac{1}{(2+i)^2}=\frac{8}{25}i$$

$$\text{الطرف الأيسر}=\frac{1}{4-4i-1}-\frac{1}{4+4i-1}$$

$$=\frac{1}{3-4i}-\frac{1}{3+4i}$$

مرافق

$$=\left(\frac{1}{3-4i}\cdot\frac{3+4i}{3+4i}\right)-\left(\frac{1}{3+4i}\cdot\frac{3-4i}{3-4i}\right)$$

$$=\frac{3+4i}{25}-\frac{3-4i}{25}=\frac{(3+4i)-(3-4i)}{25}$$

$$=\frac{\cancel{3}+4i-\cancel{3}+4i}{25}=\frac{8}{25}i=\text{الطرف الأيمن}$$

مثال

إثبت أن :

$$\frac{(1-i)^2}{1+i}+\frac{(1+i)^2}{1-i}=-2$$

$$\text{الطرف الأيسر}=\frac{\cancel{1}-2i-\cancel{1}}{1+i}+\frac{\cancel{1}+2i-\cancel{1}}{1-i}$$

$$=\left(\frac{-2i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}\right)+\left(\frac{2i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}\right)$$

$$=\frac{-2i-2}{(1)^2+(1)^2}+\frac{2i-2}{(1)^2+(1)^2}$$

$$=\frac{-\cancel{2i}-2+\cancel{2i}-2}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$

$$=\text{الطرف الأيمن}$$

مثال

ضع بصورة a + bi

$$\frac{2+3i}{1-i}\times\frac{1+4i}{4+i}=\frac{2+8i+3i-12}{4+i-4i+1}$$

$$\frac{-10+11i}{5-3i}=\frac{-10+11i}{5-3i}\cdot\frac{5+3i}{5+3i}$$

$$=\frac{-50-30i+55i-33}{5^2+3^2}$$

$$=\frac{-83+25i}{34}=\frac{-83}{34}+\frac{25}{34}i$$

WWW.iQ-RES.COM @iQRES موقع طلاب العراق



**مثال** إذا كان $C_1 = 1+i$ , $C_2 = 3-2i$ تحقق من أن:

**1** $\overline{C_1 + C_2} = \overline{C_1} + \overline{C_2}$

L.H.S

$\overline{C_1 + C_2} = \overline{(1+i)+(3-2i)}$

$= \overline{4-i} = 4+i$

R.H.S

$\overline{C_1} + \overline{C_2} = \overline{(1+i)} + \overline{(3-2i)}$

$= (1-i)+(3+2i)$

$= 4+i$

L.H.S = R.H.S

**2** $\overline{C_1 - C_2} = \overline{C_1} - \overline{C_2}$

L.H.S $\overline{C_1 - C_2}$

$= \overline{(1+i)-(3-2i)}$

$= \overline{(1+i)+(-3+2i)} = \overline{-2+3i}$

$= -2-3i$

R.H.S $\overline{C_1} - \overline{C_2}$

$\overline{(1+i)} - \overline{(3-2i)}$

$(1-i)-(3+2i)$

$(1-i)+(-3-2i) = -2-3i$

R.H.S = L.H.S

**3** $\overline{C_1 \cdot C_2} = \overline{C_1} \cdot \overline{C_2}$

L.H.S

$\overline{C_1 \cdot C_2} = \overline{(1+i)(3-2i)}$

$= \overline{3-2i+3i+2} = \overline{5+i}$

$= 5-i$

R.H.S

$\overline{C_1} \cdot \overline{C_2} = \overline{(1+i)}\ \overline{(3-2i)}$

$= (1-i)(3+2i)$

$= 3+2i-3i+2 = 5-i$

R.H.S = L.H.S

**4** $\overline{\left(\frac{C_1}{C_2}\right)} = \frac{\overline{C_1}}{\overline{C_2}}$

$\overline{\left(\frac{C_1}{C_2}\right)} = \overline{\left(\frac{1+i}{3-2i}\right)} = \overline{\left(\frac{1+i}{3-2i}\cdot\frac{3+2i}{3+2i}\right)}$

$= \overline{\left(\frac{3+2i+3i-2}{3^2+2^2}\right)} = \overline{\left(\frac{1+5i}{9+4}\right)}$

$\overline{\frac{1}{13} + \frac{5}{13}i} = \frac{1}{13} - \frac{5}{13}i$

$\frac{\overline{C_1}}{\overline{C_2}} = \frac{\overline{1+i}}{\overline{3-2i}} = \frac{1-i}{3+2i} \cdot \frac{3-2i}{3-2i}$

$= \frac{3-2i-3i-2}{(3)^2+(2)^2} = \frac{1-5i}{13}$

$\frac{1}{13} - \frac{5}{13}i$

R.H.S = L.H.S

## أسئلة وزارية حول الحالات السابقة


سؤال 1 ضع بالصورة العادية للعدد المركب:

1998 - د (1)

$$(1+3i)^2+(3-2i)^2$$

$$(1+6i-9)+(9-12i-4)$$

$$(-8+6i)+(5-12i)$$

$$(-8+5)+(6i-12i)=-3-6i$$


سؤال 2 ضع بالصورة العادية للعدد المركب:

1999 - د (1)

$$\left(\frac{3-i}{1+i}\right)^2=\left(\frac{3-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}\right)^2$$

$$=\left(\frac{3-3i-i-1}{(1)^2+(1)^2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{2-4i}{2}\right)^2=(1-2i)^2$$

$$=1-4i-4=-3-4i$$


سؤال 3 إذا كان $x=2+3i$ , $y=3-i$

جد قيمة $x^2+2y^2$

نعوض $y$ ، $x$ بالعلامة اعلاه

2000 - د (1)

$$(2+3i)^2+2(3-i)^2$$

$$(4+12i-9)+2(9-6i-1)$$

$$-5+12i+18-12i-2=11+0i$$


سؤال 4 ضع ما يأتي بالصيغة العادية ثم جد نظيره الضربي.

2002 - د (1)

$$(3+2i)(-2+i)$$

$$-6+3i-4i-2=-8-i$$

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{-8-i}\cdot\frac{-8+i}{-8+i}$$

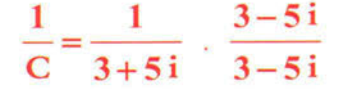
$$=\frac{-8+i}{(-8)^2+(-1)^2}=\frac{-8}{65}+\frac{1}{65}i$$


سؤال 5 جد النظير الضربي للعدد المركب $(3+5i)$ ثم ضعه بالصيغة العادية.

2003 - د (1)

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{3+5i}\cdot\frac{3-5i}{3-5i}$$

$$=\frac{3-5i}{(3)^2+(5)^2}=\frac{3}{34}-\frac{5}{34}i$$




سؤال 6 جد الصيغة العادية للعدد المركب:

2004 - د (2)

$$\left(1-\sqrt{3}i\right)^2-\left(2-\sqrt{3}i\right)^2$$

$$\left(1-2\sqrt{3}i-3\right)-\left(4-4\sqrt{3}i-3\right)$$

$$\left(-2-2\sqrt{3}i\right)-\left(1-4\sqrt{3}i\right)$$

$$\left(-2-2\sqrt{3}i\right)+\left(-1+4\sqrt{3}i\right)=-3+2\sqrt{3}i$$


سؤال 7 جد ناتج ما يأتي بالصيغة الديكارتية:

2005 - د (1)

$$(3+4i)^2+(5-3i)(1+i)$$

$$(9+24i-16)+(5+5i-3i+3)$$

$$(-7+24i)+(8+2i)$$

$$(-7+8)+(24i+2i)=1+26i$$

$$(1,26)$$



**سؤال 8** إذا كان $x = 2i - 1$

جد قيمة $x^2 + 2x + 6$


2000 خارج القطر

(ترتيب) $x = -1 + 2i$

$(-1+2i)^2 + 2(-1+2i) + 6$

$(1-4i-4) - 2 + 4i + 6$

$-3 - 4i + 4 + 4i = 1 + 0i$

**سؤال 9** ضع بالصورة العادية للعدد المركب :

2012 - د (2)

$(1+i)^5 - (1-i)^5$

$(1+i)^5 = \left[(1+i)^2\right]^2 (1+i)$

$= (1 + 2i + i^2)^2 (1+i)$

$= (2i)^2 (1+i) = 4i^2 (1+i)$

$= -4(1+i) = -4 - 4i$

$(1-i)^5 = \left[(1-i)^2\right]^2 (1-i)$

$= (1 - 2i + i^2)^2 (1-i)$

$= (-2i)^2 (1-i) = 4i^2 (1-i)$

$= -4(1-i) = -4 + 4i$

$(1+i)^5 - (1-i)^5$

$(-4-4i) - (-4+4i)$

$(-4-4i) + (4-4i) = 0 - 8i$

**سؤال 10** ضع المقدار $\frac{(1-i)^{13}}{64}$ بالصيغة العادية .

2013 خارج القطر

$$\frac{(1-i)^{13}}{64} = \frac{\left[(1-i)^2\right]^6 .(1-i)}{64}$$

$$= \frac{(1 - 2i - 1)^6 (1-i)}{64}$$

$$= \frac{(-2i)^6 (1-i)}{64}$$

$$= \frac{64 i^6 (1-i)}{64} = -1(1-i) = -1 + i$$

توضيح

$i^6 = i^4 . i^2$

$= (1)(-1) = -1$

إستراحة شعرية

يكفي بأني مُذْ وجدتُكَ صرتُ أعرفُ ما أريدْ

ووجدتُ روحي خلفَ بسمتكَ التي صارت بها الأيام عيدْ

بالله قُلْ لي... كيفَ احلمُ بالمزيدْ؟!

تابعونا على التليكرام
@iQRES

## التحليل في مجموعة الاعداد المركبة

**أولاً:** مجموع مربعين : عندما يكون لدينا مجموع مربعين $(x^2 + y^2)$ نضرب الحد الثاني بـ $(-i^2)$ ثم يصبح فرق بين مربعين ونحلل .

أي : نضع $i^2$ مع الحد الثاني ونعكس اشارته .

**1** $x^2 + y^2$

$x^2 - y^2 i^2 = (x - yi)(x + yi)$

**2** $x^2 + 4$

$x^2 - 4i^2 = (x - 2i)(x + 2i)$

**3** $a^2 + 36b^2$

$a^2 - 36b^2 i^2 = (a + 6bi)(a - 6bi)$

**4** $y^2 + 100$

$y^2 - 100i^2 = (y - 10i)(y + 10i)$

**ملاحظة** إذا طلب في السؤال تحليل عدد الى حاصل ضرب عددين مركبين يكون التحليل كما ورد اعلاه . (مجموع مربعين) .

| | | |
|---|---|---|
| $1^2=1$ | $6^2=36$ | $11^2=121$ |
| $2^2=4$ | $7^2=49$ | $12^2=144$ |
| $3^2=9$ | $8^2=64$ | $13^2=169$ |
| $4^2=16$ | $9^2=81$ | $14^2=196$ |
| $5^2=25$ | $10^2=100$ | $15^2=225$ |

* عندما يعطي في السؤال رقم نبحث عن عددين من الارقام اعلاه عند جمعهم يعطي العدد الذي في السؤال ويصبح مجموع مربعين .

مثلاً : العدد $25 \leftarrow 16+9$

العدد $85 \leftarrow 81+4$

وبعدها نغير اشارة الـ + الى – ونضع $i^2$ ونحلل كما في الامثلة :

**مثال** حلل كل مما يأتي الى حاصل ضرب عاملين بصورة a+bi

**1**

$10 = 9 + 1$
$= 9 - i^2$
$= (3 - i)(3 + i)$

أو

$10 = 1 + 9$
$= 1 - 9i^2$
$= (1 - 3i)(1 + 3i)$

**2**

$29 = 25 + 4$
$= 25 - 4i^2$
$= (5 - 2i)(5 + 2i)$

أو

$29 = 4 + 25$
$= 4 - 25i^2$
$= (2 - 5i)(2 + 5i)$

**3**

$41 = 25 + 16$
$= 25 - 16i^2$
$= (5 - 4i)(5 + 4i)$

أو

$41 = 16 + 25$
$= 16 - 25i^2$
$= (4 - 5i)(4 + 5i)$

**4**

$53 = 4 + 49$
$= 4 - 9i^2$
$= (2 - 7i)(2 + 7i)$

أو

$53 = 49 + 4$
$= 49 - 4i^2$
$= (7 - 2i)(7 + 2i)$

**5**

$85 = 81 + 4$
$= 81 - 4i^2$
$= (9 - 2i)(9 + 2i)$

أو

$85 = 4 + 81$
$= 4 - 81i^2$
$= (2 - 9i)(2 + 9i)$

**6**

$125 = 121 + 4$
$= 121 - 4i^2$
$= (11 - 2i)(11 + 2i)$

أو

$125 = 4 + 121$
$= 4 - 121i^2$
$= (2 - 11i)(2 + 11i)$

**ملاحظة** هناك سؤال غالباً ما يرد في اسئلة الامتحانات الشهرية لبعض المدارس وهي كفكرة غير واردة بشكل صريح في المنهج سوف نتطرق اليها من باب الاحتياط .



**سؤال** دون الضرب بالمرافق ضع بصورة $a+bi$

((هذه هي صيغة السؤال))

**أولاً:** إذا اعطى في البسط عدد قابل للتحليل مباشرة والاختصار مع المقام مثلاً :

1. $$\frac{25}{3+4i} \Rightarrow \frac{9+16}{3+4i} = \frac{9-16i^2}{3+4i} = \frac{(3-4i)\cancel{(3+4i)}}{\cancel{(3+4i)}} = 3-4i$$

2. $$\frac{73}{8-3i} \Rightarrow \frac{64+9}{8-3i} = \frac{64-9i^2}{8-3i} = \frac{\cancel{(8-3i)}(8+3i)}{\cancel{(8-3i)}} = 8+3i$$

**ثانياً:** إذا كان العدد يحتاج إلى تجزئة مثلاً :

3. $$\frac{40}{1+3i} = \frac{4(10)}{1+3i} = \frac{4(1+9)}{1+3i} = \frac{4(1-9i^2)}{1+3i} = \frac{4(1-3i)\cancel{(1+3i)}}{\cancel{(1+3i)}}$$
$$= 4-12i$$

أنظر أن المقام هو $10 = 1^2 + 3^2$ والعدد في الأعلى 40 لذلك نقول $4(10)$

أما الأمثلة ((الأولى والثانية)) المقام $\left[\begin{array}{l} 3^2 + 4^2 = 25 \\ 8^2 + 3^2 = 73 \end{array}\right.$ العدد موجود مباشرة نحلل

**ثالثاً:** إذا كان البسط لا يحوي عدد للتحليل فأننا نضرب الكسر بـ :

$^2$(الحقيقي) + $^2$(التخيلي) التوضيح في المثال :

**4** $\dfrac{3-i}{2+i}$

نأخذ المقام $2+i$

$2^2 \leftarrow \quad \rightarrow 1^2$

$$2^2+1^2=4+1=5$$

نضرب البسط × $\dfrac{5}{5}$ ونحلل الـ (5) التي في البسط وكما يلي :

تُحلل

$$\frac{3-i}{2+i}\cdot\frac{5}{5}$$

$$\frac{3-i}{2+i}\cdot\left(\frac{4+1}{5}\right)\Rightarrow\frac{3-i}{2+i}\cdot\frac{4-i^2}{5}\Rightarrow\frac{3-i}{\cancel{(2+i)}}\cdot\frac{\cancel{(2+i)}(2-i)}{5}$$

$$=\frac{(3-i)(2-i)}{5}$$

$$=\frac{6-3i-2i}{5}=\frac{5-5i}{5}$$

$$=1-i$$



**ثانياً:** مجموع مكعبين / فرق بين مكعبين : نضرب الحد الثاني بـ $(-i^2)$ ثم نحلل (فرق / مجموع) مكعبين .

**تذكّر** قانون مكعبين

$$x^3 - 27i \quad \rightarrow -i^2$$

$$x^3 + 27i^3 = (x+3i)(x^2 - 3xi - 9)$$

مربع الأول (عكس الاشارة) الأول × الثاني + مربع الثاني

---

**ثالثاً: التجربة**: في حالة وجود (i) في الحد الوسط نضرب الأخير بـ $(-i^2)$ ثم نحلل تجربه .

أنظر

$$x^2 - 3ix + 4$$

$$x^2 - 3ix - 4i^2 = (x+i)(x-4i)$$

$$x^2 + xi + 6$$

$$x^2 + xi - 6i^2 = (x+3i)(x-2i)$$

---

**رابعاً: اكمال المربع**: عندما لا يحلل السؤال بالتجربة ولا يوجد (i) في الوسط نضيف $\left(\frac{1}{2}\text{ معامل } x\right)^2$ ونطرقهُ .

$$x^2 + 6x + 25$$

نضيف معامل × هو (3)
تربيع (3) هو 9
نضيف 9 ونطرح 9

$$(x^2 + 6x + 9) - 9 + 25$$

أصبح مجموع مربعين

$$(x+3)^2 + 16$$

$$(x+3)^2 - 16i^2$$

$$(x+3+4i)(x+3-4i)$$



## ايجاد قيم $x , y \in R$

**أولاً:** أنظر إلى السؤال بتركيز وقمْ بفتح الأقواس أن وجدت والتخلص من التربيع والتكعيب . . . الخ .

**ثانياً:** حاول تصفية الطرفين بحيث يصبح

الحقيقي = الحقيقي

التخيلي = التخيلي (نأخذ المعاملات فقط بدون i)

**ثالثاً:** انتبه لوجود التحليل "فرق مربعين / تجربة / عدد . . . الخ"

**رابعاً:** لا تقوم بضرب المرافق في حالة وجود x أو y في البسط أو المقام وحاول أن تجد مخرج أخر لحل السؤال حسب الصيغة .

**خامساً:** إذا أعطى في السؤال مقدارين وذكر عبارة ان المقدارين مترافقان فنتبع الخطوات التالية :

1- نقوم بوضع علامة ( = ) بين المقدارين مع تغيير اشارة الجزء التخيلي لأحد الأطراف فقط .

2- نقوم بتصفية الاطراف بحسب الملاحظات كالضرب بالمرافق أو فتح التربيع أو غيرها ثم نكمل الحل .

راجع مثال (9) ومثال (10)

**مثال 1**

جد قيم $y$ ، $x$ الحقيقتين :

التخيلي = التخيلي

$$3x + 4i = 2 + 8yi$$

الحقيقي = الحقيقي

$$(3x = 2) \div 3 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$(8y = 4) \div 8 \Rightarrow y = \frac{4}{8} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$



**مثال 2**

جد قيم $x, y \in R$

$$2y + 1 - (2x - 1)i = -8 + 3i$$

تخيلي

$$(2y + 1) - (2x - 1)i = -8 + 3i$$

حقيقي

$$2y + 1 = -8 \Rightarrow 2y = -8 - 1$$

$$[2y = -9] \div 2$$

$$y = \frac{-9}{2}$$

$$-(2x - 1) = 3$$

$$-2x + 1 = 3 \Rightarrow -2x = 3 - 1$$

$$[-2x = 2] \div -2$$

$$x = -1$$

**مثال 3**

جد قيم $x, y \in R$

تخيلي

$$2x - 1 + 2i = 1 + (y + 1)i$$

حقيقي

$$2x - 1 = 1 \Rightarrow 2x = 1 + 1 \Rightarrow [2x = 2] \div 2$$

(+1)

$$\Rightarrow x = 1$$

$$y + 1 = 2 \Rightarrow y = 2 - 1 \Rightarrow y = 1$$

(−1)

**مثال 4**

جد قيم $x, y \in R$

$$y + 5i = (2x + i)(x + 2i)$$

((نفتح الأقواس))

$$y + 5i = 2x^2 + 4xi + xi - 2$$

جمع

$$y + 5i = (2x^2 - 2) + 5xi$$

$$[5x = 5] \div 5 \Rightarrow x = 1$$

$$y = 2x^2 - 2$$

$$y = 2(1)^2 - 2$$

$$y = 2 - 2 \Rightarrow y = 0$$

**مثال 5** جد قيمة كل من $x$ , $y$ الحقيقيتين واللتان تحققان المعادلة .

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right) + x + yi = (1+2i)^2$$

مُرافق — مربع حدانية

$$\left(\frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right) + x + yi = 1+4i-4$$

$$\left(\frac{1-i-i-1}{1^2+1^2}\right) + x + yi = -3+4i$$

$$\frac{-2i}{2} + x + yi = -3+4i$$




$$x + yi = -3+5i$$

$$x = -3$$

$$y = 5$$

**مثال 6** جد قيم $x , y \in R$

$$8i = (x+2i)(y+2i)+1$$

فتح الاقواس

$$8i = xy + 2xi + 2yi - 4 + 1$$

$$0 + 8i = (xy-3) + (2x+2y)i$$

حقيقي — تخيلي

$$xy - 3 = 0 \Rightarrow [xy = 3] \div x$$

$$y = \frac{3}{x} \quad ........ (1)$$

تخيلي = تخيلي $\quad [2x + 2y = 8] \div 2$

نعوض (1) في (2)

$$x + y = 4 \quad ........(2)$$

$$\left[x + \frac{3}{x} = 4\right] . x$$

$$x^2 + 3 = 4x \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-1)(x-3) = 0$$

أما $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

أو $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

نعوض $x$ في معادلة (2) لبسط $y$

عندما $x = 1$ $\quad y = \frac{3}{x} = \frac{3}{1} = 3$

عندما $x = 3$ $\quad y = \frac{3}{x} = \frac{3}{3} = 1$

| x | y |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 3 | 1 |




WWW.iQ-RES.COM

**مثال 6** جد قيم $x, y \in R$

$$\left(\frac{2-i}{1+i}\right)x+\left(\frac{3-i}{2+i}\right)y=\frac{1}{i}$$

مُرافق    مُرافق    مُرافق

$$\left(\frac{2-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}\right)x+\left(\frac{3-i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{1-i}\right)y=\frac{1}{i}\cdot\frac{-i}{-i}$$

$$\left(\frac{2-2i-i-1}{(1)^2+(1)^2}\right)x+\left(\frac{6-3i-2i-1}{(2)^2+(1)^2}\right)y=\frac{-i}{0+1}$$

$$\left(\frac{1-3i}{2}\right)x+\left(\frac{5-5i}{5}\right)y=0-i$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right)x+(1-i)y=0-i$$

$$\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}xi+y-yi=0-i$$

$$\left[\frac{1}{2}x+y=0\right].2 \Rightarrow x+2y=0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\left[\frac{-3}{2}x-y=-1\right].2 \Rightarrow -3x-2y=-2 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$ جعل المعادلتين انياً

$$x+2y=0$$

$$-3x-2y=-2$$

بالجمع

$$[-2x=-2]\div -2 \Rightarrow x=1$$ نعرض في (1)

$$x+2y=0$$

$$1+2y=0 \Rightarrow [2y=-1]\div 2 \Rightarrow y=\frac{-1}{2}$$



ملازم دار المغرب
WWW.iQ-RES.COM @iQRES قناتنا على التلي كرام موقع طلاب العراق




جد قيم $x, y \in R$

$$\frac{y}{1+i} = \frac{x^2+4}{x+2i}$$

من التمارين العامة للكتاب

* راجع تحليل مجموع مربعين $(x^2+4)$

$$\frac{y}{1+i} = \frac{x^2-4i^2}{x+2i}$$

$$\frac{y}{1+i} = \frac{(x-2i)\cancel{(x+2i)}}{\cancel{(x+2i)}}$$

$$y = (x-2i)(1+i)$$

$$y+0i = x+xi-2i+2$$

$$y+0i = (x+2)+(x-2)i$$

حقيقي    تخيلي

$$x-2=0 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

$$y = x+2$$

$$y = 2+2 \Rightarrow \boxed{y=4}$$




إذا كان $\frac{x-yi}{1+5i}$ , $\frac{3-2i}{i}$ مترافقان

جد قيم $x, y \in R$

$$\frac{x-yi}{1+5i} = \frac{3+2i}{-i}$$ ((راجع الملاحظة خامساً))

$$\frac{x-yi}{1+5i} = \left(\frac{3+2i}{-i} \cdot \frac{i}{i}\right)$$ ((مُرافق))

$$\frac{x-yi}{1+5i} = \frac{3i-2}{-i^2} \quad (-i^2 = 1)$$

$$x-yi = (-2+3i)(1+5i)$$

$$x-yi = -2-10i+3i-15$$

$$x-yi = -17-7i$$

$$\boxed{x=-17} \quad , \quad -y=-7 \Rightarrow \boxed{y=7}$$




جد قيم $x, y \in R$ إذا علمت

$$\frac{3+i}{2-i} \quad , \quad \frac{6}{x+yi}$$ مترافقان

$$\frac{6}{x+yi} = \left(\frac{3-i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i}\right)$$

$$\frac{6}{x+yi} = \frac{6-3i-2i-1}{(2)^2+(1)^2}$$

$$\frac{6}{x+yi} = \frac{5-5i}{5} \Rightarrow \frac{6}{x+yi} = \frac{5}{5} - \frac{5}{5}i$$

$$\frac{6}{x+yi} = 1-i \Rightarrow x+yi = \frac{6}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}$$

$$x+yi = \frac{6+6i}{(1)^2+(1)^2}$$

$$x+yi = \frac{6+6i}{2}$$

$$x+yi = 3+3i$$

$$\boxed{x=3} \quad , \quad \boxed{y=3}$$

## مجموعة من الأسئلة الوزارية حول موضوع إيجاد قيم $x , y \in R$




**سؤال** جد قيمتي $x , y$ التي تحقق

1996 - د (1)

$$(2x+i)(y-2i) = -2-9i$$

$$2xy - 4xi + yi + 2 = -2-9i$$

$$(2xy+2)+(-4x+y)i = -2-9i$$

(الحقيقي = الحقيقي)

$$2xy + 2 = -2$$

$$2xy = -2-2 \Rightarrow \left[2xy = -4\right] \div 2x$$

$$y = \frac{-2}{x} \quad \ldots\ldots (1)$$

(التخيلي = التخيلي)

$$-4x + y = -9 \quad \ldots\ldots (2)$$

بتعويض (1) في (2) ينتج

$$\left[-4x + \left(\frac{-2}{x}\right) = -9\right] . x$$

$$-4x^2 - 2 = -9x \Rightarrow 4x^2 - 9x + 2 = 0$$

$$(4x-1)(x-2) = 0$$

أما $4x - 1 = 0 \Rightarrow \left[4x = 1\right] \div 4 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

أو $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

نعوض $x$ في (1) لايجاد $y$

$$y = \frac{-2}{x} = \frac{-2}{\frac{1}{4}} = -8 \quad , \quad y = \frac{-2}{2} = -1$$

| x | y |
|---|---|
| $\frac{1}{4}$ | -8 |
| 2 | -1 |




**سؤال** جد قيم $x , y \in R$ التي تحقق

2000 - د (2)

$$x(x+i) + y(y-i) + i = 13$$

$$x^2 + xi + y^2 - yi = 13 - i$$

$$(x^2 + y^2) + (x - y)i = 13 - i$$

حقيقي    تخيلي

$$x^2 + y^2 = 13 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$x - y = -1 \Rightarrow x = -1 + y \quad \ldots\ldots (2)$$

نعوض (2) في (1) لينتج

$$(-1+y)^2 + y^2 = 13$$

$$1 - 2y + y^2 + y^2 - 13 = 0$$

$$\left[2y^2 - 2y - 12 = 0\right] \div (2)$$

$$y^2 - y - 6 = 0 \quad \text{تجربة}$$

$$(y+2)(y-3) = 0$$

أما $y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2$

أو $y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3$

نعوض $y$ في معادلة (1)

$x = -1 + y$

$x = -1 + (-2) \Leftarrow y = -2$ عندما

$x = -3$

$x = -1 + 3 \Leftarrow y = 3$ عندما

$x = 2$

| x | y |
|---|---|
| -3 | -2 |
| 2 | 3 |

## سؤال 3 جد قيمتي $x , y \in R$ التي تحقق




$$(3+2i)^2 \; y = (x+3i)^2$$

$$(9+12i-4)\,y = x^2+6xi-9$$

$$(5+12i)\,y = (x^2-9)+6xi$$

$$5y+12yi = (x^2-9)+6xi$$

$$5y = x^2-9 \quad \ldots\ldots (1)$$ (الحقيقي = الحقيقي)

تعويض

(التخيلي = التخيلي)

$$12y = 6x \Rightarrow x = 2y \quad \ldots\ldots (2)$$

نعوض (2) في (1)

$$5y = (2y)^2-9$$

$$5y = 4y^2-9 \Rightarrow 4y^2-5y-9=0$$

$$(4y-9)(y+1)=0$$

أما $4y-9=0 \Rightarrow [4y=9] \div 4 \Rightarrow y=\frac{9}{4}$

أو $y+1=0 \Rightarrow y=-1$

نعوض $y$ في معادلة (2)

$$x = 2y = 2\left(\frac{9}{4}\right) \Rightarrow x=\frac{9}{2}$$

$$x = 2y = 2(-1) \Rightarrow x=-2$$

| x | y |
|---|---|
| $\frac{9}{2}$ | $\frac{9}{4}$ |
| -2 | -1 |

## سؤال 4 جد قيمتي $x$، $y$ الحقيقيتين التي تحقق:

1998 - د (2)

$$(2+xi)(-x+i) = \frac{9y^2+49}{3y+7i}$$

$$-2x+2i-x^2i-x = \frac{9y^2-49i^2}{3y+7i}$$

$$-3x+(2-x^2)i = \frac{(3y+7i)(3y-7i)}{(3y+7i)}$$

$$-3x+(2-x^2)i = 3y-7i$$

$$[-3x=3y]\div 3 \Rightarrow y=-x \quad \ldots\ldots (1)$$

$$2-x^2=-7 \Rightarrow 2+7=x^2$$

$$x^2=9$$ بالجذر

$$x=\pm 3$$

$y=-x$

$y=-3 \Leftarrow x=3$ عندما

$y=-(-3) \Leftarrow x=-3$ عندما

$y=3$

## سؤال 5 جد قيم $x , y \in R$ والتي تحقق:

1999 - د (2)

$$(3x+2yi)^2 = \frac{200}{4+3i}$$

$$9x^2+12xyi-4y^2 = \frac{200}{4+3i} \cdot \frac{4-3i}{4-3i}$$

$$(9x^2-4y^2)+12xyi = \frac{800-600i}{(4)^2+(3)^2}$$

$$(9x^2-4y^2)+12xyi = \frac{800}{25}-\frac{600}{25}i$$



**سؤال 6** جد قيمتي x، y الحقيقيتين التي تحقق المعادلة :

2016 تمهيدي

$$\left(\frac{125}{11+2i}\right)x+(1-i)^2\ y=11$$

$$\left(\frac{125}{11+2i}\cdot\frac{11-2i}{11-2i}\right)x+(1-2i-1)\ y=11$$

$$\left(\frac{125(11-2i)}{(11)^2+(2)^2}\right)x-2yi=11$$

$$\left(\frac{125(11-2i)}{125}\right)x-2yi=11$$

$$(11-2i)x-2yi=11+0i$$

$$11x-2xi-2yi=11+0i$$

$$(11x)+(-2x-2y)i=11+0i$$

$$[11x=11]\div 11\ \Rightarrow\ x=1$$

(حقيقي = حقيقي)

$$[-2x-2y=0]\div -2$$

(تخيلي = تخيلي)

$$x+y=0$$

$$1+y=0\ \Rightarrow\ y=-1$$

$$(9x^2-4y^2)+12xyi=32-24i$$

$$9x^2-4y^2=32\ \ \ldots\ldots\ (1)$$

$$[12xy=-24]\div 12x\ \Rightarrow\ y=\frac{-2}{x}\ \ \ldots\ldots\ (2)$$

نعوض (2) في (1)

$$9x^2-4\left(\frac{-2}{x}\right)^2=32\Rightarrow\left[9x^2-\frac{16}{x^2}=32\right].x^2$$

$$9x^4-16=32x^2\Rightarrow 9x^4-32x^2-16=0$$

$$(9x^2+4)(x^2-4)=0$$

أما $9x^2+4=0$ يُهمل $\notin R$

أو $x^2-4=0\ \Rightarrow\ x^2=4$ بالجذر

$$x=\pm\ 2$$

$$y=\frac{-2}{x}=\frac{-2}{2}=-1$$

$$y=\frac{-2}{x}=\frac{-2}{-2}=1$$

| x | y |
|---|---|
| 2 | -1 |
| -2 | 1 |



سؤال 7 جد قيمتي $x , y \in R$ إذا علمت :

2016 - د (2)

$$( x+2i )( x-i ) = \frac{121+9y^2}{11+3yi}$$

$$x^2 - xi + 2xi + 2 = \frac{121-9y^2 i^2}{11+3yi}$$

$$( x^2 + 2 ) + xi = \frac{(11+3yi)(11-3yi)}{(11+3yi)}$$

تخيلي = تخيلي

$$( x^2 + 2 ) + xi = 11 - 3yi$$

حقيقي = حقيقي

$$x^2 + 2 = 11 \Rightarrow x^2 = 11 - 2 \Rightarrow x^2 = 9$$ بالجذر

$$x = \mp 3$$

$$x = -3y \div -3 \Rightarrow y = \frac{x}{-3} = \frac{\mp 3}{-3}$$

$$y = \pm 1$$

سؤال 8 جد قيمتي $x , y \in R$ والتي تحقق :

2008 - د (2)

$$y + 5i = ( 2x + i )( x + i )$$

$$y + 5i = 2x^2 + 2xi + xi - 1$$

$$y + 5i = ( 2x^2 - 1 ) + 3xi$$

$$y = 2x^2 - 1 \quad ........(1)$$

$$3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

$$y = 2\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 1 \Rightarrow y = \frac{50}{9} - 1$$

$$y = \frac{41}{9}$$

سؤال 9 جد قيم $x$، $y$ الحقيقيتين التي تحقق :

2010 - د (1)

$$12 + 5i = ( x + 3i )( y - 2i )$$

$$12 + 5i = xy - 2xi + 3yi + 6$$

$$xy + 6 = 12 \Rightarrow xy = 12 - 6$$

حقيقي حقيقي

$$\frac{xy}{x} = \frac{6}{x} \Rightarrow y = \frac{6}{x}$$

$$-2x + 3y = 5$$

$$-2x + 3\left(\frac{6}{x}\right) = 5 \Rightarrow \left[-2x + \frac{18}{x} = 5\right] . x$$

$$-2x^2 + 18 = 5x \Rightarrow 2x^2 + 5x - 18 = 0$$

$$( 2x + 9 )( x - 2 ) = 0$$

أما $2x + 9 = 0 \Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{-9}{2} \Rightarrow x = \frac{-9}{2}$

أو $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$$y = \frac{6}{x}$$

$$x = -\frac{9}{2} \Rightarrow y = \frac{6}{\frac{-9}{2}} = 6\left(\frac{-2}{9}\right) = -\frac{4}{3}$$

$$x = 2 \Rightarrow y = \frac{6}{2} = 3$$

# الجذور التربيعية للعدد المركب

نفرض $\sqrt{a+bi} = x+yi$ بالتربيع

$a+bi = x^2 + 2xyi - y^2$ ((مربع حدانية)) $\Rightarrow$ $a+bi = (x^2 - y^2) + 2xyi$ ((ثابتة في الحل))

ثم حقيقي = حقيقي $x^2 - y^2 = a \quad .......(1)$

تخيلي = تخيلي $\frac{2xy}{2x} = \frac{b}{2x}$

$y = \frac{b}{2x} \quad .......(2)$

$x, y \leftarrow$ الجذور هي $C = \mp(x \bigcirc yi)$ ← اشارة الجزء التخيلي لعدد السؤال

**الناتج:**

$C = \mp(x \bigcirc yi)$ (x قيمة، y قيمة) ○ ← اشارة الجزء التخيلي من السؤال

---

**مثال** جد الجذور التربيعية:

**1** $8+6i$

$\sqrt{8+6i} = x+yi$ بالتربيع

$8+6i = (x^2 - y^2) + 2xyi$

$x^2 - y^2 = 8 \quad .......(1)$

$[2xy = 6] \div 2x \Rightarrow \frac{2xy}{2x} = \frac{6}{2x}$

$y = \frac{3}{x} \quad .......(2)$

نعوض (2) في (1)

$x^2 - y^2 = 8$

$x^2 - \left(\frac{3}{x}\right)^2 = 8 \Rightarrow \left[x^2 - \frac{9}{x^2} = 8\right] . x^2$

$x^4 - 9 = 8x^2$

$x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ (تجربة)

$(x^2+1)(x^2-9) = 0$

أما $x^2 + 1 = 0$ يُهمل $\notin R$

أو $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9$ بالجذر

$x = \mp 3$

تعويض

$y = \frac{3}{x} \Rightarrow y = \frac{3}{\mp 3} = \mp 1$

$C = \mp(3+i)$

$C_1 = 3+i$, $C_2 = -3-i$ ((الجذور هي))

**2** $7+24i$

$\sqrt{7+24i}=x+yi$ بالتربيع

$7+24i=(x^2-y^2)+2xyi$

$x^2-y^2=7 \quad ......(1)$

$[2xy=24]\div 2x \Rightarrow y=\frac{12}{x} \quad ......(2)$

تعويض في معادلة (1)

$x^2-y^2=7$

$x^2-\left(\frac{12}{x}\right)^2=7 \Rightarrow \left[x^2-\frac{144}{x^2}=7\right].x^2$

$x^4-144=7x^2 \Rightarrow x^4-7x^2-144=0$

$(x^2+9)(x^2-16)=0$

أما $x^2+9=0$ يُهمل $\notin R$

أو $x^2-16=0 \Rightarrow x^2=16$ بالجذر

$x=\mp 4$

تعويض

$y=\frac{12}{x}=\frac{12}{\mp 4}=\mp 3$

$C_1=\mp(4+3i)$

$C_1=4+3i \quad , \quad C_2=-4-3i$

**توضيح**

في حالة (+) $C_1=+(4+3i)=4+3i$

في حالة (−) $C_2=-(4+3i)=-4-3i$

**3** $-i$

$\sqrt{0-i}=x+yi$ بالتربيع

$0-i=(x^2-y^2)+2xyi$

$x^2-y^2=0 \quad ......(1)$

$[2xy=-1]\div 2x \Rightarrow y=\frac{-1}{2x} \quad ......(2)$

$x^2-y^2=0$

$x^2-\left(\frac{-1}{2x}\right)^2=0 \Rightarrow \left[x^2-\frac{1}{4x^2}=0\right].4x^2$

$4x^4-1=0$ ((فرق بين مربعين))

$(2x^2+1)(2x^2-1)=0$

أما $2x^2+1=0$ يُهمل $\notin R$

أو $2x^2-1=0 \Rightarrow [2x^2=1]\div 2$

$x^2=\frac{1}{2}$ بالجذر $x=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$

$y=\frac{-1}{2x}=\frac{-1}{\sqrt{2}.\sqrt{2}\left(\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$C=\mp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

اشارة الجزء التخيلي لعدد السؤال

$C_1=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$

$C_2=\frac{-1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$



**4** $-6i$

$\sqrt{0-6i}=x+yi$ بالتربيع

$0-6i=(x^2-y^2)+2xyi$

$x^2-y^2=0 \quad .......(1)$

$[2xy=-6]\div 2x \Rightarrow y=\frac{-3}{x} \quad .......(2)$

تعويض

$x^2-y^2=0$

$x^2-\left(\frac{-3}{x}\right)^2=0 \Rightarrow \left[x^2-\frac{9}{x^2}=0\right].x^2$

$x^4-9=0$ ((فرق بين مربعين))

$(x^2-3)(x^2+3)=0$

أما $x^2-3=0 \Rightarrow x^2=3$ بالجذر

$x=\mp\sqrt{3}$

أو $x^2+3=0$ يُهمل $\notin R$

$y=\frac{-3}{x}=\frac{-3}{+\sqrt{3}}=\frac{-(\sqrt{3}.\cancel{\sqrt{3}})}{\mp\cancel{\sqrt{3}}}$

$y=\pm\sqrt{3}$

$\mp(\sqrt{3}-\sqrt{3}i)$

$C_1=\sqrt{3}-\sqrt{3}i$

$C_2=-\sqrt{3}+\sqrt{3}i$

**5** $8i$

$\sqrt{0+8i}=x+yi$ بالتربيع

$0+8i=(x^2-y^2)+2xyi$

$x^2-y^2=0 \quad .......(1)$

$\left[\frac{2xy}{2x}=\frac{8}{2x}\right]\div 2x \Rightarrow y=\frac{4}{x} \quad .......(2)$

$x^2-y^2=0$

$x^2-\left(\frac{4}{x}\right)^2=0 \Rightarrow \left[x^2-\frac{16}{x^2}=0\right].x^2$

$x^4-16=0$ ((فرق بين مربعين))

$(x^2-4)(x^2+4)=0$

أما $x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4$ بالجذر

$x=\pm 2$

أو $x^2+4=0$ يُهمل $\notin R$

$y=\frac{4}{x}=\frac{4}{+2}=\pm 2$

$C=\pm(2+2i)$

$C_1=2+2i$

$C_2=-2-2i$






**6** $\dfrac{4}{1-\sqrt{3}i}$

$$\frac{4}{1-\sqrt{3}i}\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}=\frac{4\left(1+\sqrt{3}i\right)}{(1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$\frac{\cancel{4}\left(1+\sqrt{3}i\right)}{\cancel{4}}=1+\sqrt{3}i$$

$\sqrt{1+\sqrt{3}i}=x+yi$ بالتربيع

$1+\sqrt{3}i=(x^2-y^2)+2xyi$

$x^2-y^2=1$ .......(1)

$\left[2xy=\sqrt{3}\right]\div 2x \Rightarrow y=\dfrac{\sqrt{3}}{2x}$

تعويض

$x^2-y^2=1$

$x^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2x}\right)^2=1$

$\left[x^2-\frac{3}{4x^2}=1\right].4x^2$

$4x^4-3=4x^2$

$4x^4-4x^2-3=0$ (تجربة)

$(2x^2+1)(2x^2-3)=0$

$2x^2+1=0$ يُهمل $\notin R$

أو $2x^2-3=0 \Rightarrow \left[2x^2=3\right]\div 2$

$x^2=\dfrac{3}{2}$ بالجذر $x=\mp\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$y=\dfrac{\sqrt{3}}{2x}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\left(\mp\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)}=\mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

توضيح

$$\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\sqrt{2}\,.\,\cancel{\sqrt{2}}\left(\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{\sqrt{2}}}\right)}$$

$C=\mp\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$C_1=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$

$C_2=\dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$

**7** $-25$

$x=\sqrt{-25}$

$x=\pm 5i$

**8** $-17$

$x=\sqrt{17}\,.\,\sqrt{-1}$

$x=\pm\sqrt{17}i$



# أسئلة الوزارية حول موضوع الجذور التربيعية

**سؤال 1** إذا كان $C+di=\frac{7-4i}{2+i}$ ، $c,d\in R$

1997 - د (1)

$\sqrt{2c-di}$

**ملاحظة**

عندما يعطي سؤال فيه علاقة تحتوي مجهول نقوم بتبسيط العلاقة وبضد منها المجهول .

$\therefore$ نجد قيم $c,d\in R$ من العلاقة أولاً .

$$c+di=\frac{7-4i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}$$

$$c+di=\frac{14-7i-8i-4}{(2)^2+(1)^2}=\frac{10-15i}{5}$$

$$C+di=2-3i \qquad C=2$$

$$d=-3$$

$$\sqrt{2c-di}=\sqrt{2(2)-(-3)i}$$

بالتربيع $\sqrt{4+3i}=x+yi$

$$4+3i=(x^2-y^2)+2xyi$$

$$x^2-y^2=4 \quad .......(1)$$

$$\left[\frac{2xy}{2x}=\frac{3}{2x}\right]\div 2x \Rightarrow y=\frac{3}{2x} \quad .......(2)$$

تعويض

$$x^2-y^2=4$$

$$x^2-\left(\frac{3}{2x}\right)^2=4$$

$$\left[x^2-\frac{9}{4x^2}=4\right].4x^2 \Rightarrow 4x^4-9=16x^2$$

$$4x^4-16x^2-9=0$$

$$(2x^2-9)(2x^2+1)=0$$

أما $2x^2-9=0 \Rightarrow [2x^2=9]\div 2$

بالجذر $x^2=\frac{9}{2}$

$$x=\mp\frac{3}{\sqrt{2}}$$

أو $2x^2+1=0$ يُهمل $\notin R$

$$y=\frac{3}{2x}=\frac{3}{(\sqrt{2}.\sqrt{2})\mp\frac{3}{\sqrt{2}}}=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$2=\sqrt{2}.\sqrt{2}$

((اشارة الجزء التخيلي))

$$C=\mp\left(\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$C_1=\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$C_1=\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$$





**سؤال 2** جد الجذرات التربيعيات للعدد

**2004 - د (2)** المركب $\frac{14+2i}{1+i}$

**ملاحظة** يجب وضع العدد بصيغة (a+bi)

$$\frac{14+2i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{14-14i+2i+2}{(1)^2+(1)^2}$$

$$\frac{16-12i}{2}=8-6i$$

$\sqrt{8-6i}=x+yi$ بالتربيع

$$8-6i=(x^2-y^2)+2xyi$$

$$x^2-y^2=8 \quad .......(1) \quad , \quad 2xy=-6\div 2x$$

$$y=\frac{-3}{x} \quad .......(2)$$

$$x^2-\left(\frac{-3}{x}\right)^2=8$$

$$\left[x^2-\frac{9}{x^2}=8\right].x^2 \Rightarrow x^4-9=8x^2$$

$$x^4-8x^2-9=0$$

$$(x^2-9)(x^2+1)=0$$

أما $x^2-9=0 \Rightarrow x^2=9$ بالجذر $x=\mp 3$

أو $x^2+1=0 \Rightarrow$ يُهمل $\notin R$

$$y=\frac{-3}{x}=\frac{-3}{\mp 3}=\pm 1$$

$$C=\mp(3-i)$$

$$C_1=3-i$$

$$C_2=-3+i$$

**سؤال 3** جد الجذرات التربيعيات للعدد

**2010 - د (2)** المركب $(-1+7i)(1+i)$

**ملاحظة** نضع العدد بصيغة (a+bi)

$$-1-i+7i-7=-8+6i$$

$\sqrt{-8+6i}=x+yi$ بالتربيع

$$-8+6i=(x^2-y^2)+2xyi$$

$$x^2-y^2=-8 \quad .......(1)$$

$$[2xy=6]\div 2x \Rightarrow y=\frac{3}{x} \quad .......(2)$$

$$x^2-y^2=-8$$

$$x^2-\left(\frac{3}{x}\right)^2=-8 \Rightarrow \left[x^2-\frac{9}{x^2}=-8\right].x^2$$

$x^4-9=-8x^2 \Rightarrow x^4+8x^2-9=0$ تجربة

$$(x^2+9)(x^2-1)=0$$

أما $x^2+9=0$ يُهمل $\notin R$

أو $x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1$ بالجذر $x=\mp 1$

$$y=\frac{3}{x}=\frac{3}{\mp 1}=\mp 3$$

$$C=\mp(1+3i)$$

$$C_1=1+3i$$

$$C_2=-1-3i$$

# تكوين المعادلة التربيعية إذا عُلِمَ جذرها

**عندما يطلب معادلة تربيعية ويعطي جذري المعادلة:**

1. يجب وضع الجذرين بصورة $a+bi$
2. نجد مجموع الجذرين وحاصل ضرب الجذرين .
3. نطبق العلاقة التالية:

$x^2 -($ مجموع الجذرين $)x+($ حاصل ضرب الجذرين $)=0$ ((صيغة قياسية))

موقع طلاب العراق
WWW.iQ-RES.COM

* عندما يقول في السؤال ان المعادلة ذات معاملات حقيقية هذا يعني ان الجذران مترافقان .

**مثال 1** كوّن المعادلة التربيعية التي جذرها m،L حيث $m=1-i,\ L=1+2i$

$m+L=(1-i)+(1+2i)$

مجموع الجذرين $=2+i$

$m.L=(1-i)(1+2i)$

ضرب الجذرين $=1+2i-i+2$

$=3+i$

$x^2-(2+i)x+(3+i)=0$

**مثال 2** كوّن المعادلة التربيعية التي جذرها $\mp(2+2i)$

$m=2+2i\ ,\ L=-2-2i$

$m+L=(2+2i)+(-2-2i)=0$

$m.L=(2+2i)(-2-2i)$

$=-\not{4}-4i-4i+\not{4}=-8i$

$x^2-(0)x+(-8i)=0$

$x^2-8i=0$

**مثال 3** كوّن المعادلة التربيعية التي جذرها $m=\frac{3-i}{1+i}\ ,\ L=(3-2i)^2$

* يجب تبسيط الجذور أولاً

$m=\frac{3-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{3-3i-i-1}{(1)^2+(1)^2}$

$m=\frac{2-4i}{2}\Rightarrow m=1-2i$

$L=(3-2i)^2=9-12i-4$

$L=5-12i$

مجموع الجذرين $m+L=(1-2i)+(5-12i)$

$=6-14i$

$m.L=(1-2i)(5-12i)$

$=5-12i-10i-24=-19-22i$

$x^2-(6-14i)x+(-19-22i)=0$

**مثال 1** كوّن المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي احد جذورها (i) .

((المعاملات حقيقية أي ان الجذران مترافقان)) . $\left.\begin{matrix} m = i \\ L = -i \end{matrix}\right]$

$$m + L = (i) + (-i) = 0$$
$$m . L = (i)(-i) = -i^2 = 1$$
$$x^2 - (0)x + 1 = 0$$
$$x^2 + 1 = 0$$

**مثال 2** كوّن المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي احد جذورها (3-4i) .

((مترافقان)) $m = 3 - 4i \quad , \quad L = 3 + 4i$

$$m + L = (3 - 4i) + (3 + 4i)$$
$$= 6$$
$$m . L = (3 - 4i)(3 + 4i)$$
$$= 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$
$$x^2 - 6x + 25 = 0$$

**مثال 3** كوّن المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي احد جذورها (5-i) .

$$m + L = (5 - i) + (5 + i)$$
$$= 10$$
$$m . L = (5 - i)(5 + i)$$
$$= (5)^2 + (1)^2 = 25 + 1 = 26$$
$$x^2 - 10x + 26 = 0$$

**مثال 4** كوّن المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي احد جذورها $\frac{\sqrt{3} + 3i}{4}$ .

$$\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i \quad , \quad \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}i$$

$$m + L = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}i\right)$$
$$= \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$m . L = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}i\right)$$
$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2$$
$$= \frac{3}{16} + \frac{9}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$
$$x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{4} = 0$$

## أسئلة مختلفة ذات صلة

* إذا أعطى في السؤال معادلة تربيعية تحويل مجاهيل نتبع الخطوات التالية :

**أولاً:** نضع المعادلة بالشكل القياسي حيث الطرف الايمن = 0 ثم نجعلها بالصيغة التالية :

$x^2 -$ ( مجموع الجذرين ) x + (حاصل ضرب الجذرين) = 0

**ثانياً:** إذا وجد أكثر من حد فيه × نسحب الـ × عامل مشترك ويسحب باشارة سالب لأن الشكل القياسي فيه معامل × سالب

**ثالثاً:** نقسم على معامل $x^2$ دائماً لجعله =1

**رابعاً:** نحدد مجموع الجذرين وحاصل ضرب الجذرين.

**خامساً:** إذا كان في المعادلة مجهول واحد فقط نحاول البدء بالجزء المعلوم كلياً .

(حاصل الضرب أو حاصل الجمع)

كما في السؤال (2)

الصبر مفتاح الفرج

WWW.iQ-RES.COM

**سؤال 1** إذا كان (2+4i) هو أحد جذري المعادلة $2x^2 - x - bx + c - 6 = 0$ معاملاتها حقيقية، جد $b , c \in R$

2015 - د (2)

$$2x^2 - x - bx + c - 6 = 0$$

$$\left[2x^2 - x(1+b) + (c-6) = 0\right] \div 2$$

عامل مشترك

انظر هنا

$$x^2 - x\left(\frac{1+b}{2}\right) + \left(\frac{C-6}{2}\right) = 0$$

مجموع الجذرين    حاصل ضرب الجذرين

الجذران مترافقان لأن المعاملات حقيقية

$$(2-4i)+(2+4i) = \frac{1+b}{2}$$

مجموع الجذرين

$$4 = \frac{1+b}{2} \Rightarrow 1+b = 8$$

$$b = 8-1$$

$$b = 7$$

$$(2-4i)(2+4i) = \frac{c-6}{2}$$

حاصل ضرب الجذرين

$$(2)^2 + (4)^2 = \frac{c-6}{2} \Rightarrow 4+16 = \frac{c-6}{2}$$

$$20 = \frac{c-6}{2} \Rightarrow c-6 = 40$$

$$c = 40+6$$

$$c = 46$$

**سؤال 2** إذا كان $(3+i)$ هو أحد جذري المعادلة $x^2 - ax + (5+5i) = 0$ فما قيمة $a \in C$ وما قيمة الجذر الآخر؟ (الكتاب)

نبدأ بالجزء الكامل وهو حاصل ضرب الجذرين

$$m.L = 5+5i \Rightarrow (3+i)(L) = 5+5i$$

$$L = \frac{5+5i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i} = \frac{15-5i+15i+5}{9+1}$$

$$L = \frac{20+10i}{10} = \frac{20}{10} + \frac{10}{10}i$$

$$L = 2+i$$

الان نجد قيمة a وهي تمثل مجموع الجذرين

$$a = m+L$$

$$a = (3+i)+(2+i)$$

$$a = 5+2i$$

**سؤال 3** إذا كان أحد جذري المعادلة $x^2 + K = 4x - 12ix$ هو ثلاث امثال الآخر جد الجذران وما قيمة K؟

$$x^2 + K = 4x - 12ix$$

$$x^2 - 4x + 12ix + K = 0$$

$$x^2 - x(4-12i) + K = 0$$

مجموع الجذرين

أحد الجذرين ثلاثة أمثال الاخر $m = 3L$

$$m+L = (4-12i)$$

$$3L+L = 4-12i$$

$$[4L = 4-12i] \div 4 \Rightarrow L = 1-3i$$

$$m = 3(1-3i)$$

$$m = 3-9i$$

لأن k يمثل حاصل ضرب الجذرين $\Leftarrow K = m.L$

$$K = (3-9i)(1-3i)$$

$$K = 3-9i-9i-27$$

$$K = -24-18i$$

**سؤال 4** إذا كان $(2+i)$ يمثل أحد جذري المعادلة $x^2 - 4ix + a = 0$ جد الجذر الاخر. ثم جد قيمة a .

$$x^2 - 4ix + a = 0 \Rightarrow x^2 - (4i)x + a = 0$$

مجموع الجذرين

$$m+L = +4i$$

$$2+i+L = 4i \Rightarrow L = -2+4i-i$$

$L = -2+3i$ الجذر الأخر

$a =$ حاصل ضرب الجذرين

$$a = m.L$$

$$a = (2+i)(-2+3i)$$

$$a = -4+6i-2i-3$$

$$a = -7+4i$$

# حل المعادلة التربيعية في ℂ

* يتم حل المعادلة من الشكل $ax^2 + bx + c = 0$ باستخدام قانون الدستور .

حيث : $a =$ معامل $x^2$

$b =$ معامل $x$

$c =$ الحد المطلق ((بدون X))

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**مثال 1** جد مجموعة حل المعادلة الآتية في مجموعة الأعداد المركبة $x^2 + 4x + 5 = 0$

$a = 1$

$b = 4$

$c = 5$

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(4) \mp \sqrt{(4)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-4 \mp \sqrt{16 - 20}}{2}$$

$$x = \frac{-4 \mp \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \mp 2i}{2}$$

$\sqrt{4} . \sqrt{-1} = 2i$

أما $x = \frac{-4 + 2i}{2} \Rightarrow x = -2 + i$

أو $x = \frac{-4 - 2i}{2} \Rightarrow x = -2 - i$

**مثال 2** جد مجموعة حل المعادلة :

$2Z^2 - 5Z + 13 = 0$

$a = 2$

$b = -5$

$c = 13$

$$Z = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$Z = \frac{-(-5) \mp \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(13)}}{2(2)}$$

$$Z = \frac{5 \mp \sqrt{25 - 104}}{4}$$

$$Z = \frac{5 \mp \sqrt{-79}}{4} = \frac{5 \mp \sqrt{79}i}{4}$$

أما $Z = \frac{5 + \sqrt{79}i}{4}$

أو $Z = \frac{5 - \sqrt{79}i}{4}$

**مثال 3** حل المعادلة في $\mathbb{C}$

$$Z^2 - 2Zi + 3 = 0$$

$a = 1$

$b = 2i$

$c = 3$

$$Z = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$Z = \frac{-(-2i) \mp \sqrt{(-2i)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)}$$

$$Z = \frac{2i \mp \sqrt{4i^2 - 12}}{2}$$

$$Z = \frac{2i \mp \sqrt{-4-12}}{2} = \frac{2i \mp \sqrt{-16}}{2}$$

$\sqrt{16}\,.\,\sqrt{-1} = 4i$

$$Z = \frac{2i \mp 4i}{2}$$

أما $Z = \frac{2i+4i}{2} = \frac{6i}{2} = 3i$

أو $Z = \frac{2i-4i}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$

* إذا كان الجذر $\sqrt{b^2 - 4ac}$ يحوي $(i)$ نأخذ الجذر ونجده بطريقة الفرضية أما إذا كان الجذر $\sqrt{b^2 - 4ac}$ فقط عدد سالب لا نستخدم الفرضية .

مثال (3) ومثال (1) و (2) كان بدون $i$ فقط عدد سالب لا يوجد فرضية .

أنظر مثال (4) الجذر فيه $(i)$ بالداخل نستخدم الفرضية .

**مثال 4** جد مجموعة حل المعادلة:

$$Z^2 - 3Z + 3 + i = 0$$

$a = 1$

$b = -3$

$c = 3 + i$

$$Z = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$Z = \frac{-(-3) \mp \sqrt{(-3)^2 - 4(1)[3+i]}}{2(1)}$$

فرضية

$$Z = \frac{3 \mp \sqrt{9 - 12 - 4i}}{2} = \frac{3 \mp \sqrt{-3-4i}}{2}$$

$\sqrt{-3-4i} = x + yi$ بالتربيع

$-3 - 4i = (x^2 - y^2) + 2xyi$

$x^2 - y^2 = -3 \quad .......(1)$

$[2xy = -4] \div 2x \Rightarrow y = \frac{-2}{x} \quad .......(2)$

$x^2 - y^2 = -3 \Rightarrow x^2 - \left(\frac{-2}{x}\right)^2 = -3$

$\left[x^2 - \frac{4}{x^2} = -3\right] . x^2 \Rightarrow x^4 - 4 = -3x^2$

$x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

$(x^2 + 4)(x^2 - 1) = 0$

أما $x^2 + 4 = 0$ يُهمل $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \mp 1$

$y = \frac{-2}{x} = \frac{-2}{\pm 1} = \pm 2 \Rightarrow \pm(1 - 2i)$

$$Z = \frac{3 \mp (1-2i)}{2}$$

$Z = \frac{3 + (1-2i)}{2} = 2 - i$

$Z = \frac{3 - 1 + 2i}{2} = 1 + i$

**مثال 5** جد مجموعة حل المعادلة:

$$Z^2+2Z+i(2-i)=0$$

$$Z^2+2Z+2i-i^2=0$$

$$Z^2+2Z+(1+2i)=0$$

$a=1$

$b=2$

$c=1+2i$

$$Z=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$Z=\frac{-(2)\mp\sqrt{(2)^2-4(1)[1+2i]}}{2(1)}$$

$$Z=\frac{-2\mp\sqrt{4-4-8i}}{2}$$

$$Z=\frac{-2\mp\sqrt{-8i}}{2}$$

((نجد $\sqrt{-8i}$ كما تعلمنا سابقاً)) لأن في الجذر $i$

بالتربيع $\sqrt{0-8i}=x+yi$

$$0-8i=(x^2-y^2)+2xyi$$

$x^2-y^2=0$ .......(1)

$[2xy=-8]\div 2x\Rightarrow y=\frac{-4}{x}$ .......(2)

$$x^2-y^2=0$$

$$x^2-\left(\frac{-4}{x}\right)^2=0\Rightarrow\left[x^2-\frac{16}{x^2}=0\right].x^2$$

$$x^4-16=0$$

$$(x^2+4)(x^2-4)=0$$

أما $x^2+4=0$ يُهمل $\notin R$

أو $x^2-4=0\Rightarrow x^2=4$ بالجذر

$$x=\mp 2$$

$$y=\frac{-4}{x}=\frac{-4}{\mp 2}=\pm 2$$

هنا تعوض

$$\sqrt{-8i}=\mp(2-2i)$$

$$Z=\frac{-2\mp(2-2i)}{2}$$

أما $Z=\frac{-2+2-2i}{2}=\frac{-2i}{2}=-i$

أو $Z=\frac{-2-2+2i}{2}=\frac{-4+2i}{2}=-2+i$

**ملاحظة** إذا أعطى المعادلة بطريقة مجموع مربعين نحلل كما تعلمنا طريقة تحليل مجموع مربعين .

**مثال** حل المعادلة $4Z^2 + 25 = 0$

نضرب ( $-i^2$ )

$4Z^2 - 25i^2 = 0$

$(2Z - 5i)(2Z + 5i) = 0$

أما $2Z + 5i = 0 \Rightarrow [2Z = -5i] \div 2$

$Z = \frac{-5}{2}i$

أو $2Z \pm 5i = 0 \Rightarrow [2Z = 5i] \div 2$

$Z = \frac{5}{2}i$

**مثال** حل المعادلة $Z^2 = -12$

بالجذر $Z^2 = -12$

$Z^2 = -12$

$Z = \sqrt{-12}$

$Z = \sqrt{12} . \sqrt{-1}$

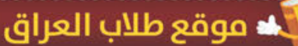
$Z = \sqrt{12}i \Rightarrow Z = \mp 2\sqrt{3}i$









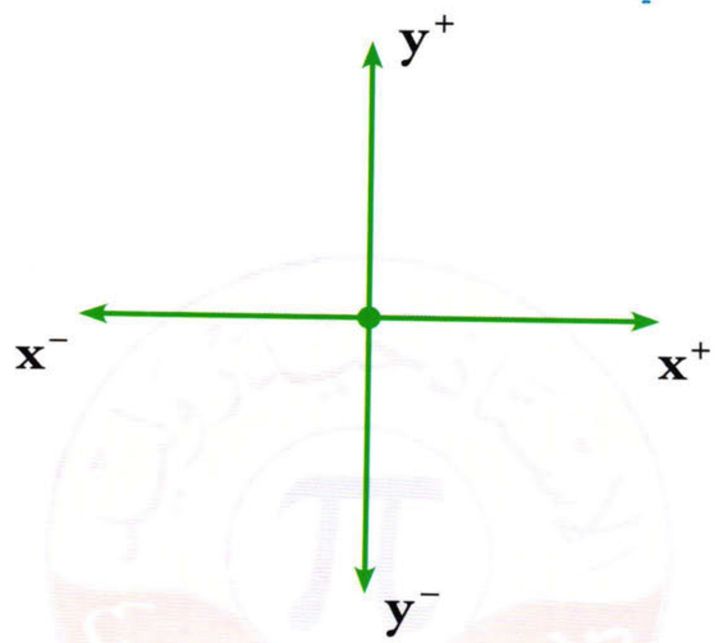




# التمثيل الهندسي للأعداد المركبة

العدد المركب $a + bi$ يمكن كتابتهُ بشكل زوج مرتب $P(a, b)$

* مراجعة المستوي الاحداثي :

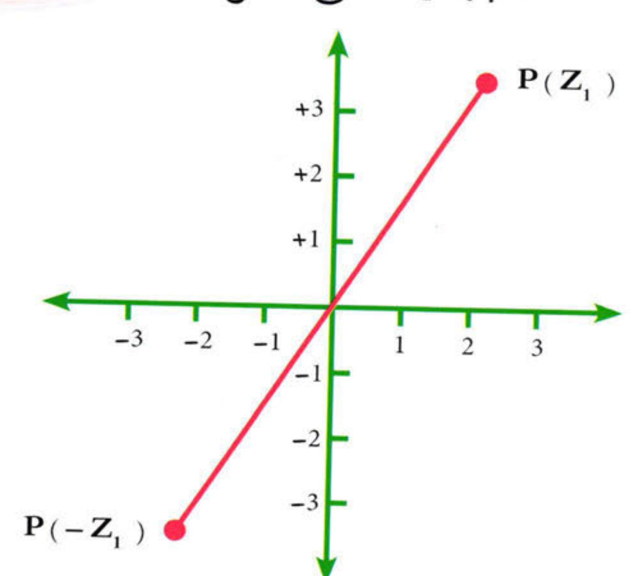



**مثال 1** أكتب النظير الجمعي لكل من الاعداد التالية ثم مثّل هذه الاعداد ونظائرها الجمعية على شكل ارجاند :

**1** $Z_1 = 2 + 3i \rightarrow (2, 3)$

$-Z_1 = -2 - 3i \rightarrow (-2, -3)$

* ((النظير نقلب اشارة العدد كله))



**2** $Z_2 = -1 + 3i \rightarrow (-1, 3)$

$-Z_2 = +1 - 3i \rightarrow (1, -3)$

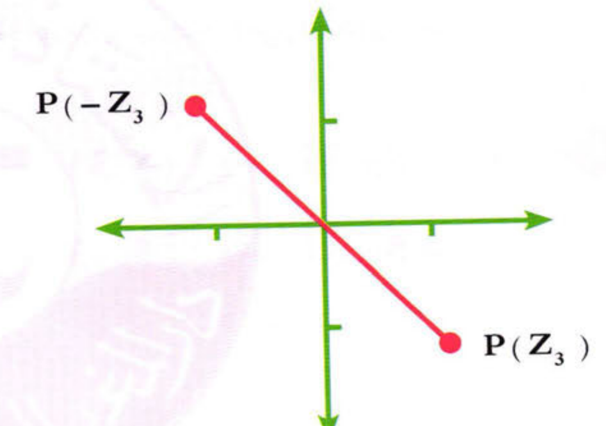







**3** $Z_3 = 1 - i \quad (1, -1)$

$-Z_3 = -1 + i \quad (-1, 1)$

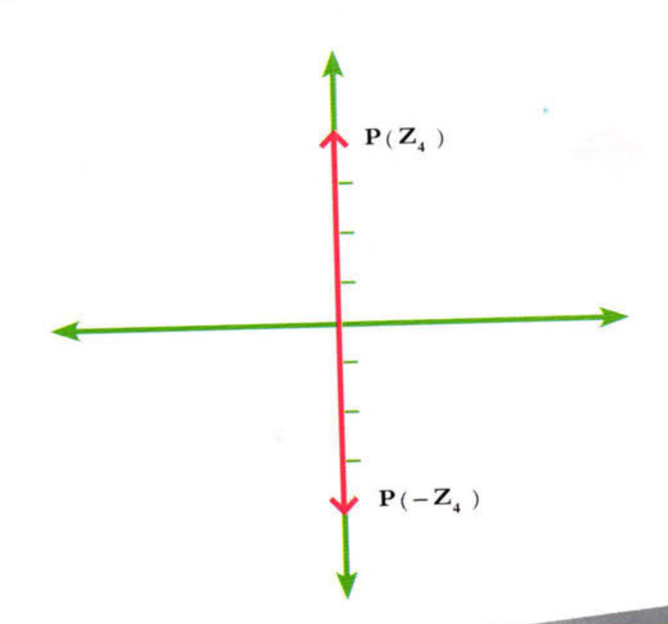





**4** $Z_4 = 4i$

$Z_4 = 0 - 4i \quad (0, -1)$

$-Z_4 = 0 - 4i \quad (0, -4)$





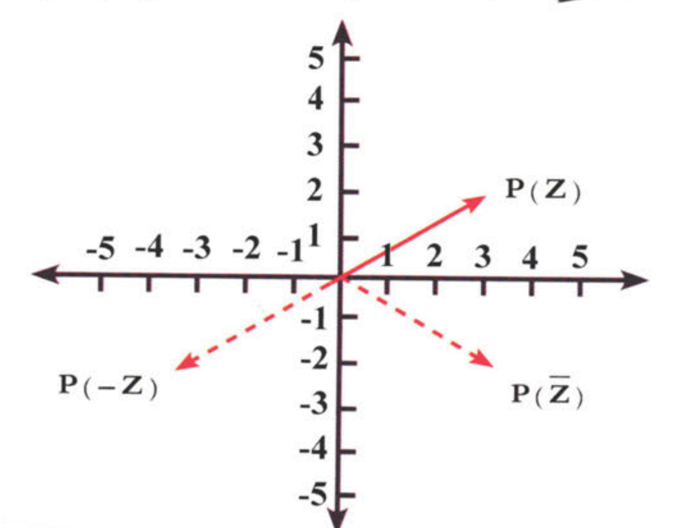
إذا كان $(Z = 4 + 2i)$ فوضح على شكل ارجاند كلاً من :

$Z \ , \ \bar{Z} \ , \ -Z$

$Z = 4 + 2i \rightarrow (4, 2)$

$\bar{Z} = 4 - 2i \rightarrow (4, -2)$

$-Z = -4 - 2i \rightarrow (-4, -2)$



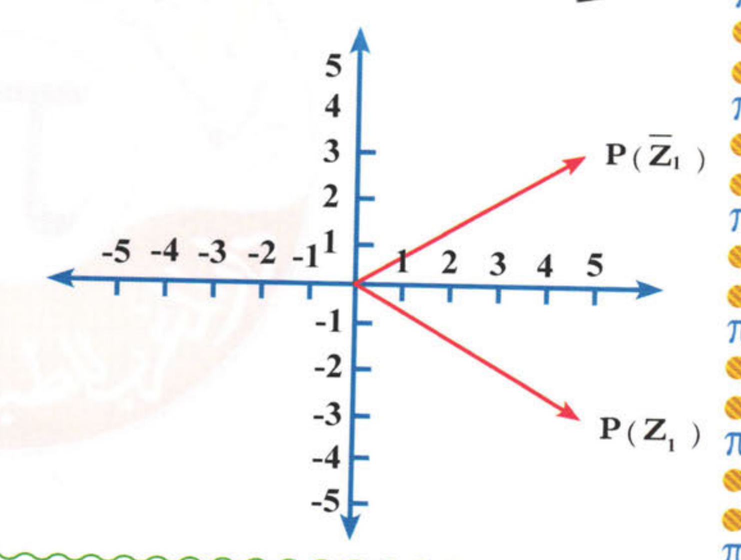



أكتب العدد المرافق لكل من الأعداد الآتية ثم مثّلها على شكل ارجاند :



$Z_1 = 5 + 3i \rightarrow (5, 3)$

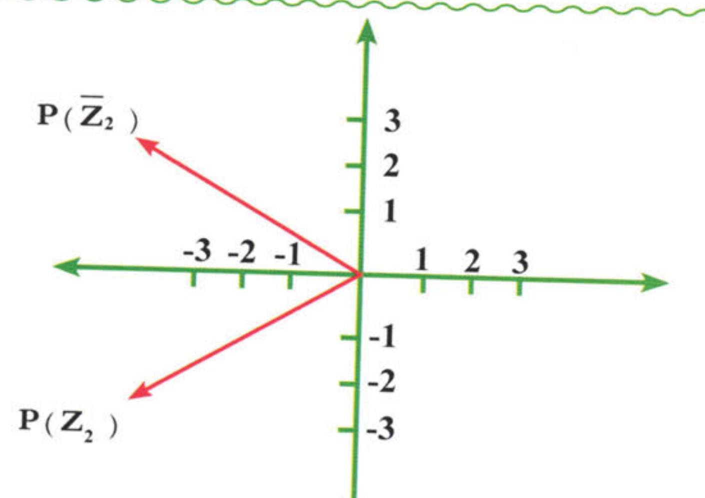
$\bar{Z}_1 = 5 - 3i \rightarrow (5, -3)$






$Z_2 = -3 + 2i \rightarrow (-3, 2)$

$\bar{Z}_2 = -3 - 2i \rightarrow (-3, -2)$



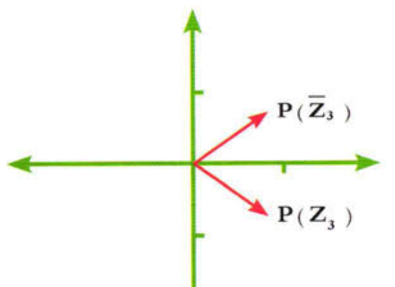






**2** $Z_3 = 1 - i \rightarrow (1, -1)$

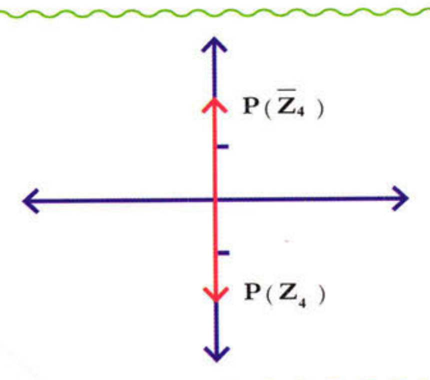
$\overline{Z}_3 = 1 + i \rightarrow (1, 1)$




**3** $Z_4 = -2i$

$Z_4 = 0 - 2i \qquad (0, -2)$

$\overline{Z}_4 = 0 + 2i \qquad (0, 2)$






**مثال 4** إذا كانت $Z_1 = 4 - 2i$ ، $Z_2 = 1 + 2i$ مثّل على شكل ارجاند $Z_1 + Z_2$ .

$Z_1 + Z_2 = (4 - 2i) + (1 + 2i)$

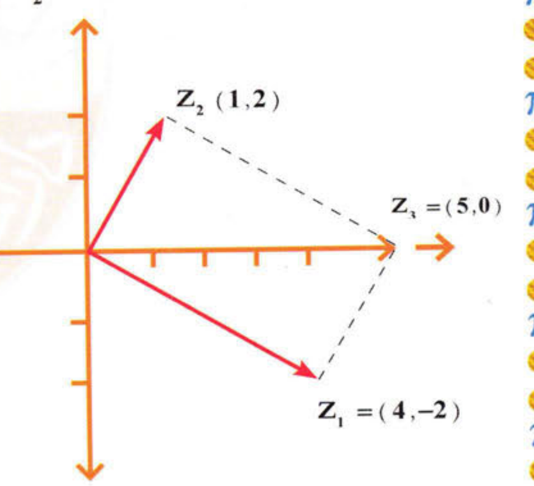
$= (4 + 1) + (-2 + 2i)$

$= 5 + 0i$

$Z_1 = 4 - 2i \qquad (4 - 2)$

$Z_2 = 1 + 2i \qquad (1, 2)$

$Z_3 = 5 + 0i \qquad (5, 0)$






**مثال 5** إذا كانت $Z_1 = 6 - 2i$ ، $Z_2 = 2 - 5i$ مثّل على شكل ارجاند $Z_1 - Z_2$ .

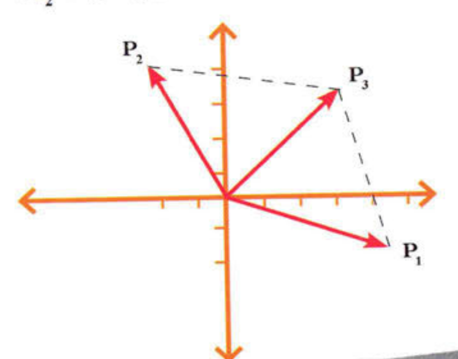
$Z_1 - Z_2 = (6 - 2i) - (2 - 5i)$

$= (6 - 2i) + (-2 + 5i) = 4 + 3i$

$P_1(Z_1) = P_1(6, -2)$

$P_2(Z_2) = P_2(-2, 5)$

$P_3(Z_3) = P_3(4, 3)$



## مراجعة

| θ | sin θ | cos θ |
|---|---|---|
| $\frac{3\pi}{2}=270^\circ$ | $-1$ | $0$ |
| $\frac{\pi}{6}=30^\circ$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\frac{\pi}{3}=60^\circ$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\frac{\pi}{4}=45^\circ$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ |

| θ | sin θ | cos θ |
|---|---|---|
| $0^\circ$ | 0 | 1 |
| $2\pi=360^\circ$ | 0 | 1 |
| $\frac{\pi}{2}=90^\circ$ | 1 | 0 |
| $\pi=180^\circ$ | 0 | $-1$ |

موقع طلاب العراق
WWW.iQ-RES.COM

## إيجاد قيم ( $\cos\theta$ – $\sin\theta$ ) لبعض الزوايا

**أولاً:** $n\pi$
- n فردي نعتبر الزاوية $\pi$
- n زوجي نعتبر الزاوية صفر

$\sin 20\pi=\sin 0=0$
$\cos 22\pi=\cos 0=1$
$\sin 10\pi=\sin 0=0$
← ((n عدد زوجي اعتبرنا الزاوية صفر))

$\cos 13\pi=\cos\pi=-1$
$\cos 15\pi=\cos\pi=-1$
$\sin 55\pi=\sin\pi=0$
← ((n فردي اعتبرنا الزاوية $\pi$ ))

**ثانياً:** الزوايا التابعة للزوايا الخاصة $\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)$ :

مثلاً: $\frac{5\pi}{4}$ , $\frac{3\pi}{4}$ , $\frac{5\pi}{6}$ ... الخ .

1. نهمل العـــدد في البسط ونأخذ الزاويـة الخاصة فقط $\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)$ ونجد $\frac{\sin}{\cos}$ .
2. نضرب العدد × الزاوية ونحدد الربع ونضع الاشارات .

| | |
|---|---|
| الربع الثاني: sin (+) , cos (−) | الربع الأول: sin (+) , cos (+) |
| الربع الثالث: sin (−) , cos (−) | الربع الرابع: sin (−) , cos (+) |

(المحاور: 0 / 360 ، 90 ، 180 ، 270)

**مثال**

جد : $\cos\frac{5\pi}{6}$

نهمل الـ (5) ونجد $\cos\frac{\pi}{6}$ وهو $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ من الجدول

الآن نضرب $5 \times 30 = 150$ وهي في الربع الثاني الـ cos سالب ← $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

↓ $\frac{\pi}{6}$

**مثال**

جد : $\sin\frac{7\pi}{4}$

نهمل الـ (7) ونجد $\frac{\pi}{4}$ وهو $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ من الجدول .

الآن نضرب $7 \times 45 = 315$ وهي في الربع الرابع الـ (sin) سالب ← $\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

↓ $\left(\frac{\pi}{4}\right)$

**ثالثاً:** إذا كان البسط أكبر من ضعف المقام نقسّم البسط على المقام ويجب ان يكون الناتج زوجي وسوف اوضح الطريقة في المثال .

**1** $\cos\frac{49\pi}{4}$

$49 \div 4$: الناتج $12$ ← ناتج زوجي (o.k)، $4 \times 12 = 48$، الباقي $1$

$$\begin{array}{r} 12 \\ 4\,\overline{)\,49} \\ \underline{4\phantom{9}} \\ 09 \\ \underline{8} \\ 1 \end{array}$$

نضع الباقي في البسط

$\cos\frac{1\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

**2** $\sin\frac{37\pi}{6}$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 6\,\overline{)\,73} \\ \underline{36} \\ 1 \end{array}$$

6 ← زوجي o.k

$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

**3** $\sin\frac{47\pi}{4}$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 4\,\overline{)\,47} \\ \underline{4\phantom{7}} \\ 07 \\ \underline{4} \\ 3 \end{array}$$

لأن الناتج فردي نعيد القسمة ونجعل الناتج زوجي (دائماً)

$$\begin{array}{r} 10 \\ 4\,\overline{)\,47} \\ \underline{4\phantom{7}} \\ 7 \end{array}$$

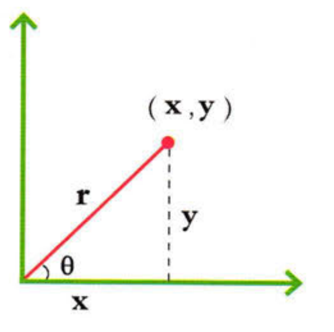
$\sin\frac{47\pi}{4}$

$\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ (نفس الطريقة أعلاه)

# المقياس والقيمة الاساسية لسعة العدد المركب

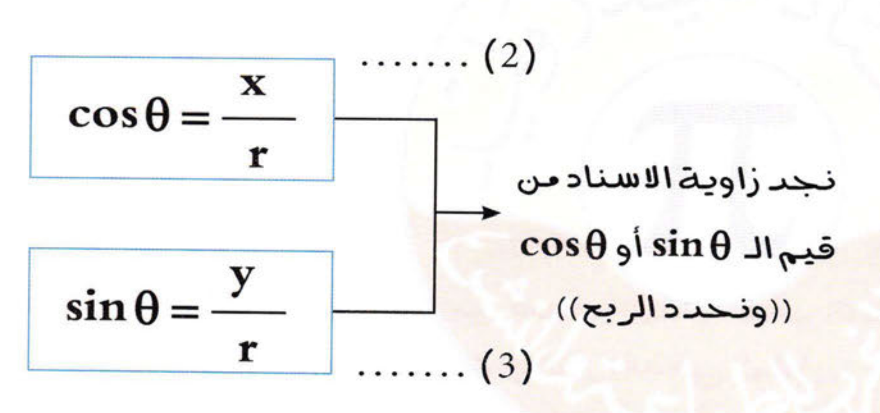
**أولاً:** إذا طلب المقياس والسعة للعدد المركب $Z = x + yi$

$Z = (x, y)$




$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \ldots\ldots\ (1)$$

يرمز للمقياس بالرمز $r$ أو $\|Z\|$ ويُقرأ $Mod(Z)$




ويرمز للسعة بالرمز $\theta$

وتكتب $org(Z)$ أو $\theta$

* يجب وضع العدد المركب بصيغة $a + bi$ أي الصيغة العددية للعدد المركب ثم نبدأ بتطبيق القوانين اعلاه (1) و (2) و (3) .

$x$ ← يمثل الجزء الحقيقي مع الاشارة

$y$ ← يمثل الجزء التخيلي ويُعوض بدون الـ $(i)$ انتبه الى ذلك جيداً .

| | |
|---|---|
| $(-,+)$<br>$\theta = \pi -$ (زاوية الاسناد) | $(+,+)$<br>زاوية الاسناد $= \theta$ |
| $(-,-)$<br>$\theta = \pi +$ (زاوية الاسناد) | $(+,-)$<br>$\theta = 2\pi -$ (زاوية الاسناد) |

**مثال 1** إذا كان $Z = 1 + \sqrt{3}i$ فجد المقياس والقيمة الاساسية لسعة Z .

الربع الأول $Z = 1 + \sqrt{3}i \rightarrow Z = (\underset{x}{\overset{+}{1}}, \underset{y}{\overset{+}{\sqrt{3}}})$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$r = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4}$

$\therefore \; r = 2$ (المقياس)

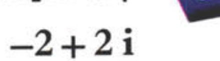
$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

زاوية الأسناد هي $\frac{\pi}{3}$ في الربع الأول

السعة $\theta = $ زاوية الأسناد $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

**مثال 2** جد مقياس وسعة العدد المركب



$-2 + 2i$

الربع الثاني $-2 + 2i \Rightarrow (\underset{x}{\overset{-}{-2}}, \underset{y}{\overset{+}{2}})$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$r = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2}$

$\therefore r = 2\sqrt{2}$ (المقياس)

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

زاوية الأسناد هي $\frac{\pi}{4}$ في الربع الثاني

السعة $\theta = \pi - \frac{\pi}{4} \underset{\text{مقام}}{\overset{\text{توحيد}}{\Rightarrow}} \theta = \frac{3\pi}{4}$

قانون الربع الثاني

**مثال 3** إذا كان $Z = -1 - i$ فجد المقياس والقيمة الاساسية لسعة Z .

الربع الثالث $Z = -1 - i \rightarrow Z = (\underset{x}{\overset{-}{-1}}, \underset{y}{\overset{-}{-1}})$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1}$

$r = \sqrt{2}$ (المقياس)

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

زاوية الأسناد هي $\frac{\pi}{4}$ في الربع الثالث

السعة $\theta = \pi + \frac{\pi}{4} \underset{\text{مقام}}{\overset{\text{توحيد}}{\Rightarrow}} \theta = \frac{5\pi}{4}$


موقع طلاب العراق
WWW.iQ-RES.COM



**ثانياً:** إذا أعطى المقياس والقيمة الأساسية للسعة ويطلب العدد المركب :

* إذا لم يعطي زاوية خاصة فراجع طريقة أيجاد قيم $\cos\theta$ $\sin\theta$ الواردة في (صفحة 53) .

$$x = r \cos\theta$$

$$y = r \sin\theta$$

حيث $Z = x + yi$

$Z =$ الجزء الحقيقي + الجزء التخيلي (i)

**مثال 1** عدد مركب مقياسه $\left(2\sqrt{2}\right)$ والقيمة الأساسية للسعة $\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ جد العدد بصورة $a + bi$

$r = 2\sqrt{2} \quad , \quad \theta = \frac{3\pi}{4}$

$x = r \cos\theta$

$x = 2\sqrt{2} \ . \ \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$x = 2\sqrt{2} . \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow x = -2$ الجزء الحقيقي

$y = r \sin\theta$

$y = 2\sqrt{2} \ . \ \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$y = 2\sqrt{2} . \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow y = 2$ الجزء التخيلي

$Z = x + yi \Rightarrow Z =$ الجزء الحقيقي + الجزء التخيلي (i)

$Z = -2 + 2i$

**مثال 2** إذا كان مقياس عدد مركب = 4 والقيمة الاساسية لسعته $\left(\frac{11\pi}{6}\right)$ جد العدد بصورة $a + bi$

$r = 4 \quad , \quad \theta = \frac{11\pi}{6}$

$x = r \cos\theta$

$x = 4\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)$

$x = \overset{2}{\cancel{4}} \ . \ \left(\frac{\sqrt{3}}{\underset{1}{\cancel{2}}}\right) \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$ الجزء الحقيقي

$y = r \sin\theta$

$y = 4\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)$

$y = \overset{2}{\cancel{4}}\left(\frac{-1}{\underset{1}{\cancel{2}}}\right) \Rightarrow y = -2$ الجزء التخيلي

$Z = x + yi \Rightarrow Z =$ الجزء الحقيقي + الجزء التخيلي (i)

$Z = 2\sqrt{3} - 2i$

**فكرة إثرائية:** يمكن ربط هذه الحالة مع موضوع تكوين المعادلة التربيعية وكما في الأمثلة الآتية :



**مثال 1** كوّن المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي أحد جذورها مقياسه (2) وسعته الاساسية $\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

**ملاحظة** يجب أن نجد العدد المركب وهو أحد جذور المعادلة أما الجذر الأخر فهو مرافقة لأن المعادلة ذات معاملات حقيقية .

$$x = r\cos\theta$$

$$x = 2\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$x = 2\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow x = 1$$

$$y = r\sin\theta$$

$$y = 2\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$y = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow y = -\sqrt{3}$$

$$Z = x + yi \Rightarrow Z_1 = 1 - \sqrt{3}i$$

الجذر الأخر $Z_2 = 1 + \sqrt{3}i$

مجموع الجذرين $= \left(1 - \sqrt{3}i\right) + \left(1 + \sqrt{3}i\right)$

$$= 2$$

حاصل ضرب الجذرين $= \left(1 - \sqrt{3}i\right)\left(1 + \sqrt{3}i\right)$

$$= (1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2$$

$$= 1 + 3 = 4$$

$$x^2 - 2x + 4 = 0$$

**مثال 2** إذا علمت ان $Z = -1 + hi$ عدد مركب القيمة الاساسية لسعته $\frac{3\pi}{4}$ جد قيمة (h) ثم كون المعادلة التربيعية التي جذرها الأول Z والثاني ضعف الأول .

$$(\underset{x}{-1}, \underset{y}{h}) \Rightarrow x = -1, y = h$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow r = \frac{x}{\cos\theta} = \frac{-1}{\cos\frac{\pi}{4}}$$

$$r = \frac{-1}{\frac{-1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$y = r\ \sin\theta$$

$$y = \sqrt{2}.\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$y = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow y = 1 \ ,\ h = 1$$

$Z_1 = -1 + i$ الجذر الأول

$Z_2 = 2Z_1$ الجذر الثاني ضعف الأول

$$Z_2 = -2 + 2i$$

مجموع الجذرين $= (-1 + i) + (-2 + 2i)$

$$= -3 + 3i$$

حاصل ضرب الجذرين $= (-1 + i)(-2 + 2i)$

$$= 2 - 2i - 2i - 2$$

$$= -4i$$

$$x^2 - (-3 + 3i)x + (-4i) = 0$$

**الصيغة القطبية:** هناك صيغة أخرى للعدد المركب وهي الصيغة القطبية والتي تكتب بالشكل :

السعة = $\theta$ , المقياس = $r$

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

---

**مثال 1** عبّر عن العدد المركب $-2+2i$ بالصيغة القطبية .

$$-2+2i \rightarrow (-2, 2) \quad ((\text{الربع الثاني}))$$
$$(x, y)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2}$$

$$r = 2\sqrt{2} \quad (\text{القياس})$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{4}$ الربع الثاني

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{4} \overset{\text{توحيد}}{\underset{\text{مقام}}{\Rightarrow}} \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$Z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

**مثال 2** ضع العدد $2\sqrt{3} - 2i$ بالصيغة القطبية .

$$2\sqrt{3} - 2i \rightarrow (2\sqrt{3}, -2) \quad ((\text{الربع الرابع}))$$
$$(x, y)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{12+4} = \sqrt{16}$$

$$r = 4$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{6}$ ربع رابع

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} \overset{\text{توحيد}}{\underset{\text{مقام}}{\Rightarrow}} \theta = \frac{11\pi}{6}$$

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$Z = 4\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

# مبرهنة ديموافر

**أولاً:** إذا كان لدينا $(a+bi)^n$ حيث n عدد صحيح (ليس كسراً).

$$Z^n = r^n\left[\cos\theta + i\sin\theta\right]^n \Rightarrow Z^n = r^n\left[\cos(\theta . n) + i\sin(\theta . n)\right]$$

**ملاحظة** إذا كان n عدد صحيح سالب تصبح العلاقة:

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$
$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$Z^{-n} = r^{-n}\left[\cos(\theta . n) - i\sin(\theta . n)\right]$$

أي أن السالب الذي مع الزاوية يُهمل مع دالة الـ cos ويتم وضعه قبل دالة الـ sin

موقع طلاب العراق
WWW.iQ-RES.COM

**ملاحظة** لحل سؤال ديموافر وكان الاس عدد صحيح يجب توفير ثلاث اركان وهي r القياس ، $\theta$ السعة ، n وهو اس القوس
وقد تعلمت سابقاً كيف تجد r و $\theta$ . ثم تطبق قانون مبرهنة ديموافر أعلاه.

**الجزء الأول من الموضوع:** يعطي صيغة قطبية جاهزة ما عليك سوى ضرب (الأس × الزاوية) كما في الأمثلة التالية:

**مثال 1** أحسب:

**1** $\left[\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right]^4$

$$= \cos\left(\frac{3\pi}{8}.4\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{8}.4\right)$$

$$= \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$$

$$= 0 + i(-1) \Rightarrow 0 - i$$

**2** $\left[\cos\frac{5}{24}\pi + i\sin\frac{5}{24}\right]^4$

$$= \cos\left(\frac{5\pi}{24}.4\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{24}.4\right)$$

$$= \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$$

$$= \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

**3** $\left[\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right]^{-3}$

$$= \cos\left(\frac{7\pi}{12}.(-3)\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}.(-3)\right)$$

$$= \cos\frac{-7\pi}{4} + i\sin\left(\frac{-7\pi}{4}\right)$$ (يهمل)

إنتبه ! السالب يهمل مع cos ويتم وضع السالب قبل الـ sin

$$= \cos\frac{7\pi}{4} - i\sin\frac{7\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}i\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

## مثال 2

بسّط ما يلي :

**1** $$\frac{(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^5}{(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^3}$$

* لا يمكن ان نطرح الاسس ((عند القسمة تطرح الاسس)) لأن الاقواس مختلفة .
لذلك سوف نضرب العدد الذي بجانب θ بأس القوس ((عكس العملية بالضبط)).

$$\frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^{10}}{(\cos\theta + i\sin\theta)^9} = (\cos\theta + i\sin\theta)$$

**2** $(\cos\theta + i\sin\theta)^8 (\cos\theta - i\sin\theta)^4$

$\cos\theta - i\sin\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^{-1}$
"توضيح"

$(\cos\theta + i\sin\theta)^8 (\cos\theta + i\sin\theta)^{-4}$

$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos 4\theta + i\sin 4\theta$

**حل آخر:**

$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 \left[(\cos\theta + i\sin\theta)^4 (\cos\theta - i\sin\theta)^2\right]$

مترافقان

$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 \left[\cos^2\theta + \sin^2\theta\right]^4$

$1 = (\text{تخيلي})^2 + (\text{حقيقي})^2$

$\cos 4\theta + i\sin 4\theta$

## مثال 3

أحسب باستخدام ديموافر $(1+i)^{11}$

$1+i \rightarrow (1,1)$ ؛ $x, y$ ، $+ +$ ((الربع الأول))

الركن الأول $(r)$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$r = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} \Rightarrow r = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{4}$ الربع الأول

الركن الثاني $\theta = \frac{\pi}{4}$

الركن الثالث $n=11$

قانون ديموافر $Z^n = r^n (\cos\theta + i\sin\theta)^n$

تعويض $Z^{11} = (\sqrt{2})^{11} \left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]^{11}$

ضرب الاس في الزاوية $Z^{11} = 32\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{4} + i\sin\frac{11\pi}{4}\right)$

تبسيط الزاوية $= 32\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$= 32\sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -32 + 32i$

الناتج

**توضيح:**

$\frac{11\pi}{4}$ : $11 \div 4 = 2$ ، $8$ ، والباقي $3$ $\rightarrow \frac{3\pi}{4}$

**4 مثال** أحسب باستخدام ديموافر $(1-i)^7$

$1-i \rightarrow (\overset{+}{\underset{x}{1}}, \overset{-}{\underset{y}{-1}})$ الربع الرابع

الركن الأول (r) $r=\sqrt{x^2+y^2}$

$r=\sqrt{(1)^2+(-1)^2} \rightarrow r=\sqrt{2}$

الركن الثاني السعة ( $\theta$ )

$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ زاوية الأسناد $\frac{\pi}{4}$

$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-1}{\sqrt{2}}$ الربع الرابع

$\theta=2\pi-\frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta=\frac{7\pi}{4}$

الركن الثالث n=7

قانون ديموافر $Z^n=r^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n$

تعويض $Z^7=(\sqrt{2})^7\left[\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right]^7$

الاس × الزاوية $Z^7=8\sqrt{2}\left(\cos\frac{49\pi}{4}+i\sin\frac{49\pi}{4}\right)$

تبسيط الزاوية $=8\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

الناتج $=8\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$=8+8i$

**5 مثال** أحسب باستخدام ديموافر $(\sqrt{3}+i)^{-9}$

$\sqrt{3}+i \rightarrow (\overset{+}{\sqrt{3}}, \overset{+}{1})$ الربع الأول

$r=\sqrt{x^2+y^2}$

$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}$

$r=2$

$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ زاوية الأسناد $\frac{\pi}{6}$ الربع الأول

$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{2}$ $\theta=\frac{\pi}{6}$

$Z^n=r^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n$

$Z^{-9}=(2)^{-9}\left[\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right]^{-9}$

يُهمل ← ، يخرج قبل sin

$=\frac{1}{2^9}\left[\cos\frac{-9\pi}{6}+i\sin\frac{-9\pi}{6}\right]$

$=\frac{1}{512}\left(\cos\frac{3\pi}{2}-i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

تذكّر $\frac{3\pi}{2}=270^\circ$

$=\frac{1}{512}(0-(-1)i)$

$=0+\frac{1}{512}i$

# نتيجة مبرهنة ديموافر

عندما يكون اس القوس كسر وبشكل ( $\frac{1}{n}$ ) أي ان الكسر بسطهُ = 1 يكون السؤال نتيجة ديموافر .

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\theta + i\sin\theta\right]^{\frac{1}{n}} \Rightarrow Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$$

* ولحل سؤال النتيجة توفير أربع اركان وهي :

المقياس $r =$ , السعة $\theta =$ , مقام الاس $n =$ , $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

**ملاحظة** عندما يطلب (الجذور التربيعية – التكعيبية – الجذور الاربعة . . .الخ) لعدد مركب غير مرفوع الى اس يعني نتيجة والاس كسر ولا يعطي قوس في هذه الحالة انت عليك التمييز :

جذور تربيعية معناها $\Rightarrow (a+bi)^{\frac{1}{2}} \rightarrow n = 2, \quad k = 0, 1$

جذور تكعيبية معناها $\Rightarrow (a+bi)^{\frac{1}{3}} \rightarrow n = 3, \quad k = 0, 1, 2$

جذور الأربعة معناها $\Rightarrow (a+bi)^{\frac{1}{4}} \rightarrow n = 4, \quad k = 0, 1, 2, 3$

k نقف قبل الـ n برقم كما تلاحظ الامثلة التوضيحية ←

* إذا كان العدد المركب مرفوع الى اس كسر ولكن (البسط $\neq 1$) للأس فيكون السؤال (مبرهنة ونتيجة) .

مثلاً $(a+bi)^{\frac{3}{2}} = \left[(a+bi)^3\right]^{\frac{1}{2}}$ $\begin{cases} (a+bi)^3 \\ (\text{ناتج المبرهنة})^{\frac{1}{2}} \end{cases}$

مثلاً $(a+bi)^{\frac{-5}{2}} = \left[(a+bi)^{-5}\right]^{\frac{1}{2}}$ $\begin{cases} (a+bi)^{-5} \\ (\text{الناتج})^{\frac{1}{2}} \end{cases}$ نتيجة ديموافر

مثلاً $(a+bi)^{\frac{2}{-3}} = \left[(a+bi)^{-2}\right]^{\frac{1}{3}}$ $\begin{cases} (a+bi)^{-2} & \text{مبرهنة} \\ (\text{الناتج})^{\frac{1}{3}} & \text{نتيجة} \end{cases}$

**إنتبه !**
ضع اشارة السالب مع القوس الداخلي (مع المبرهنة) مهما كان موقع السالب في الأس .

* عند قراءة الملاحظة الاخيرة انظر الى سؤال 2017 دور أول فيه شرح مفصل لهذه الحالة (سؤال 20) في الاسئلة الوزارية .

**مثال 1** جد الجذور التربيعية للعدد المركب $-1+\sqrt{3}i$ باستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر .

$$-1+\sqrt{3}i \rightarrow (\underset{-}{-1},\underset{+}{\sqrt{3}}) \quad (x,y)$$

الربع الثاني $n=2$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$r=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}$$

$$r=2$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-1}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{3}$ الربع الثاني

$$\theta=\pi-\frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta=\frac{2\pi}{3}$$

$$Z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\theta+i\sin\theta\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$Z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$k=0 \quad \frac{\frac{2\pi}{3}+0}{2}=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$$

$$Z_1=2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$Z_1=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$$

$$k=1 \quad \frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{2}=\frac{\frac{2\pi+6\pi}{3}}{2}=\frac{8\pi}{6}$$

$$\theta=\frac{4\pi}{3}$$

$$Z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{-1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$$

**مثال 2** جد الجذور التكعيبية للعدد المركب $27i$ باستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر .

$$0+27i \rightarrow (0,27) \quad (x,y) \quad , \quad n=3$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$r=\sqrt{(0)^2+(27)^2}=\sqrt{27^2} \Rightarrow r=27$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{0}{27}=0$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{27}{27}=1$$

هنا لا نطبق قانون الأرباع لأن الزاوية $\frac{\pi}{2}$ لا تنتمي الى ربع وتقع على الحدود بين الربعين الأول والثاني .

$$\theta=\frac{\pi}{2}$$

$$Z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$$

عندما $k=0$

$$\frac{\frac{\pi}{2}+0}{3}=\frac{\pi}{6}$$

$$Z_1=27^{\frac{1}{3}}\left[\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right]$$

$$Z_1=3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$$

موقع طلاب العراق
WWW.iQ-RES.COM

$k=1$

$$\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}+\frac{\frac{\pi+4\pi}{2}}{3}=\frac{5\pi}{6}$$

$$Z_2=3\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$Z_2=3\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{-3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$$

$k=2$

$$\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}=\frac{\frac{\pi+8\pi}{2}}{3}=\frac{9\pi}{6}$$

$$=\frac{3\pi}{2}$$

$$Z_3=3\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$=3(0-i)=-3i$$



مثال 3 جد الجذور الاربعة للعدد $(-16)$ .

$$-16+0i \rightarrow \underset{(-16,0)}{(x,y)} \quad , \quad n=4$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-16)^2+(0)^2}=\sqrt{256}$$

$$r=16$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-16}{16}=-1$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{0}{16}=0$$

لا نطبق قانون الأرباع لأن $\pi$ تقع على الحدود بين الربعين الثاني والثالث .

$\theta=\pi$ ((تبقى كما هي))

$$Z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$$

الزاوية

$$\frac{\theta+2k\pi}{n}\Rightarrow\frac{\pi+0}{4}=\frac{\pi}{4}$$

$$Z_1=(16)^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$Z_1=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\Rightarrow Z_1=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$$

$$\frac{\pi+2\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$$

$$Z_2=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$=2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$$

$k=2$ عندما

$$\frac{\pi+4\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$$

$$Z_3=2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$=2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$$

$k=3$ عندما

$$\frac{\pi+6\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$$

$$Z_4=2\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$$




زوروا موقعنا للمزيد
WWW.iQ-RES.COM

مثال 4 أوجد قيم $(-64i)^{\frac{1}{6}}$ باستخدام مبرهنة ديموافر.

$$0-64i \rightarrow \overset{(x,y)}{(0,-64)} \quad , \quad n=6$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$r=\sqrt{0+(-64)^2} \Rightarrow r=64$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{0}{64}=0\\ \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-64}{64}=-1\end{array}\right] \theta=\frac{3\pi}{2}$$

$$Z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$$

عندما $k=0$

$$\frac{\frac{3\pi}{2}+0}{6}=\frac{3\pi}{12}=\frac{\pi}{4}$$

$$Z_1=(64)^{\frac{1}{6}}\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$2\left(\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}i\right) \Rightarrow Z_1=\sqrt2+\sqrt2 i$$

عندما $k=1$

$$\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi}{6}=\frac{\frac{3\pi+4\pi}{2}}{6}=\frac{7\pi}{12}$$

$$Z_2=2\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

عندما $k=2$

$$\frac{\frac{3\pi}{2}+4\pi}{6}=\frac{\frac{3\pi+8\pi}{2}}{6}=\frac{11\pi}{12}$$

$$Z_3=2\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$$

عندما $k=3$

$$\frac{\frac{3\pi}{2}+6\pi}{6}=\frac{\frac{3\pi+12\pi}{2}}{6}=\frac{15\pi}{12}$$

$$\frac{5\pi}{4}$$

$$Z_4=2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$Z_4=2\left(-\frac{1}{\sqrt2}-\frac{1}{\sqrt2}i\right) \Rightarrow Z_4=-\sqrt2-\sqrt2 i$$

عندما $k=4$ $\quad \frac{\frac{3\pi}{2}+8\pi}{6}=\frac{19\pi}{12}$

$$Z_5=2\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$$

عندما $k=5$ $\quad \frac{\frac{3\pi}{2}+10\pi}{6}$

$$\frac{23\pi}{12}$$

$$Z_6=2\left(\cos\frac{23\pi}{12}+i\sin\frac{23\pi}{12}\right)$$

**مثال 5** أوجد الصيغة القطبية للمقدار $\left(\sqrt{3}+i\right)^2$ ثم جد الجذور الخمسة له .

$(x,y)$

$\sqrt{3}+i \rightarrow \left(\sqrt{3},1\right)$ الربع الأول

$r=\sqrt{x^2+y^2}$

$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}$

$r=2$

$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ زاوية الأسناد $\frac{\pi}{6}$

$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{2}$ ربع أول $\theta=\frac{\pi}{6}$

$Z^n=r^n\ (\cos\theta+\sin\theta)^n$

$Z^2=2^2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^2$

$Z^2=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

الجذور الخمسة $Z^{\frac{1}{5}}$

$Z^{\frac{1}{5}}=4^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{5}}$

$Z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$

عندما $k=0$

$\frac{\frac{\pi}{3}+0}{5}=\frac{\pi}{15}$

$Z_1=\sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15}\right)$

عندما $k=1$ $\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{5}=\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{5}=\frac{7\pi}{15}$

$Z_2=\sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{7\pi}{15}+i\sin\frac{7\pi}{15}\right)$

عندما $k=2$ $\frac{\frac{\pi}{3}+4\pi}{5}=\frac{13\pi}{15}$

$Z_3=\sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{13\pi}{15}+i\sin\frac{13\pi}{15}\right)$

عندما $k=3$ $\frac{\frac{\pi}{3}+6\pi}{5}=\frac{19\pi}{15}$

$Z_4=\sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{19\pi}{15}+i\sin\frac{19\pi}{15}\right)$

عندما $k=4$ $\frac{\frac{\pi}{3}+8\pi}{5}=\frac{25\pi}{15}=\frac{5\pi}{3}$

$Z_5=\sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

$Z_5=\sqrt[5]{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

استخرجنا قيم sin , cos لأن الزاوية خاصة

**مثال 6** حل المعادلة $x^3+1=0$ باستخدام مبرهنة ديموافر.

بالجذر التكعيبي $x^3=-1$

$$x=\sqrt[3]{-1} \Rightarrow x=(-1+0i)^{\frac{1}{3}}$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$r=\sqrt{(-1)^2+(0)^2} \Rightarrow r=1$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{x}{r}=\frac{-1}{1}=-1\\ \sin\theta&=\frac{y}{r}=\frac{0}{1}=0\end{aligned}\right]\ \theta=\pi$$

$$Z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\theta+i\sin\theta\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$Z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$$

عندما $k=0 \quad \frac{\pi+0}{3}=\frac{\pi}{3}$

$$Z_1=(1)^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$Z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

عندما $k=1 \quad \frac{\pi+2\pi}{3}=\frac{3\pi}{3}=\pi$

$$Z_2=(1)^{\frac{1}{3}}(\cos\pi+i\sin\pi)$$

$$Z_2=-1+0i$$

عندما $k=2$

$$\theta=\frac{\pi+4\pi}{3} \Rightarrow \theta=\frac{5\pi}{3}$$

$$Z_3=(1)^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$Z_3=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

* يمكن ان يكون منطوق السؤال بصيغ مختلفة مثل:

**أولاً**: باستخدام ديموافر جد الجذور التكعيبية للعدد (1-) معناها

$$x^3=-1 \Rightarrow (-1+oi)^{\frac{1}{3}}$$

**ثانياً**: باستخدام ديموافر جد الجذور التكعيبية للعدد (8i) معناها

$$x^3=8i \Rightarrow (o+8i)^{\frac{1}{3}}$$

**لذلك إنتبه جيداً لمنطوق السؤال.**

## الأسئلة الوزارية حول موضوع المقياس والسعة والصيغة القطبية ومبرهنة ديموافر

**سؤال 1** إذا كان $Z = (-\sqrt{3}, 1)$ عدداً مركباً أكتب الشكل الجبري له ثم جد مقياسه والقيمة الاساسية للسعة.

**2002 - د (2)**

$$Z = -\sqrt{3} + i \rightarrow \underset{(x,y)}{(-\sqrt{3}, 1)}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4}$$

$r = 2$ ((المقياس))

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{6}$ / الربع الثاني

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{2}$$ ((السعة))

**سؤال 2** إذا كان $(-1 + \sqrt{3i})$ عدداً مركباً جد مقياسه والقيمة الاساسية لسعته.

**2008 خارج القطر**

$$Z = -1 + \sqrt{3}i \rightarrow \underset{(x,y)}{(-1, \sqrt{3})}$$ الربع الثاني

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} \Rightarrow r = 2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{3}$ / الربع الثاني

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

**سؤال 3** ضع المقدار $\frac{7+\sqrt{3}i}{1+2\sqrt{3}i}$ بالصيغة العادية للعدد المركب ثم جد مقياسه وسعته الأساسية.

**2001 - د (1)**

$$Z = \frac{7+\sqrt{3}i}{1+2\sqrt{3}i} \cdot \frac{1-2\sqrt{3}i}{1-2\sqrt{3}i}$$

$$Z = \frac{7 - 14\sqrt{3}i + \sqrt{3}i + 6}{(1)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \frac{13 - 13\sqrt{3}i}{13}$$

$$Z = \frac{13}{13} - \frac{13\sqrt{3}i}{13} \Rightarrow Z = 1 - \sqrt{3}i$$

$$Z = \underset{(x,y)}{(1, -\sqrt{3})}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4}$$

$r = 2$ ((المقياس))

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{3}$ / الربع الرابع

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{3}$$ ((السعة))

## سؤال 4 جد المقياس والقيمة الاساسية للسعة للعدد المركب $\frac{2i}{1+i}$

2007 - د (2)

$$Z=\frac{2i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} \Rightarrow Z=\frac{2i-2i^2}{(1)^2+(1)^2}$$

$$Z=\frac{2+2i}{2} \Rightarrow Z=1+i \qquad \begin{matrix}(1,1)\\(x,y)\end{matrix}$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(1)^2+(1)^2} \Rightarrow r=\sqrt{2}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{4}$ / الربع الأول

السعة $\theta=\frac{\pi}{4}$

## سؤال 5 جد المقياس والقيمة الاساسية للسعة للعدد المركب $\frac{4}{1-\sqrt{3}i}$

2008 - د (2)

$$Z=\frac{4}{1-\sqrt{3}i}\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}$$

$$Z=\frac{4(1+\sqrt{3}i)}{(1)^2+(\sqrt{3})^2}=\frac{\cancel{4}(1+\sqrt{3}i)}{\cancel{4}}$$

$$Z=1+\sqrt{3}i \rightarrow (1,\sqrt{3})$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2} \Rightarrow r=2$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{3}$ / الربع الأول

$$\theta=\frac{\pi}{3}$$

## سؤال 6 جد المقياس والقيمة الاساسية للسعة للعدد المركب $(1+\sqrt{3}i)^2$

2008 - د (1)

**إنتبه !** يجب وضع العدد المركب بصيغة a+bi والتخلص من التربيع .

$$Z=1+2\sqrt{3}i-3 \Rightarrow Z=-2+2\sqrt{3}i$$

$$Z=(-2,2\sqrt{3})$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$r=\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{4+12}$$

$r=4$ ((المقياس))

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{3}$ / الربع الثاني

$$\theta=\pi-\frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta=\frac{2\pi}{3}$$

## سؤال 7 إذا كان $Z=1+\sqrt{3}i$ عدداً مركباً أكتب الشكل الديكارتي له ثم جد القياس والسعة .

2006 - د (2)

$$Z=1+\sqrt{3}i \rightarrow (1,\sqrt{3})$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2} \Rightarrow r=2$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{3}$ / الربع الأول

$$\theta=\frac{\pi}{3}$$

**سؤال 8** إذا كان عدداً مركباً مقياسه 3 وسعته $\frac{\pi}{3}$ جد الشكل الديكارتي والجبري له.

2003 - د (2)

$r = 3, \quad \theta = \frac{\pi}{3}$

$x = r.\cos\theta$

$x = 3\cos\frac{\pi}{3} = 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$

$y = r.\sin\theta$

$y = 3\ \sin\frac{\pi}{3} = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$Z = \left(\frac{3}{2}\ ,\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\ ,\ Z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

((الديكارتي)) ((الجبري))

**سؤال 9** إذا كان عدداً مركباً مقياسه (4) وسعته $\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ جد الشكل الديكارتي والجبري له.

2006 - د (1)

$r = 4 \quad , \quad \theta = \frac{5\pi}{6}$

$x = r.\cos\theta$

$x = 4.\cos\frac{5\pi}{6} = 4\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3}$

$y = r.\sin\theta$

$y = 4\sin\frac{5\pi}{6} = 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2$

$Z = \left(-2\sqrt{3}, 2\right)\ ,\ Z = -2\sqrt{3} + 2i$

((الديكارتي)) ((الجبري))

**سؤال 10** أكتب الصيغة القطبية للعدد المركب $3 - 3\sqrt{3}i$

2015 - د (3)

$Z = 3\sqrt{3}i \rightarrow Z = \left(3, -3\sqrt{3}\right)$

$(x, y)$ الربع الرابع

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$r = \sqrt{(3)^2 + (-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 27} = \sqrt{36}$

$r = 6$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\sin\theta = \frac{y}{2} = \frac{-3\sqrt{3}}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

زاوية الأسناد هي $\frac{\pi}{3}$

$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{3}$

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$Z = 6\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

**سؤال 11** جد الصيغة القطبية للعدد المركب $5 - 5i$

2014 - د (3)

$Z = 5 - 5i \rightarrow (5, -5)$ الربع الرابع

$(x, y)$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$r = \sqrt{(5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50}$

$r = 5\sqrt{2}$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{4}$ الربع الرابع

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{4}$$

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$Z = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

**سؤال 12** اكتب العدد $Z = (1+\sqrt{3}i)^2$ بالصيغة القطبية .

2016 - د (1) خارج القطر

$$Z = (1+\sqrt{3}i)^2 = 1 + 2\sqrt{3}i - 3$$

$$= -2 + 2\sqrt{3}i \quad (-2, 2\sqrt{3}) \; (x, y)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16}$$

$$r = 4$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{3}$ الربع الثاني

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$Z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

**تنويه !** لو قال باستخدام ديموافر لا نفتح التربيع ونحل ديموافر n=2



**سؤال 13** جد بابسط صورة

2015 - د (1) خارج القطر

**a** $\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)^{-3}$

$$\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}.(-3)\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}.(-3)\right)\right]$$

$$\cos\frac{7\pi}{4} - i\sin\frac{7\pi}{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}i\right) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

**b** $(\cos\theta + i\sin\theta)^8 \; (\cos\theta - i\sin\theta)^4$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^8 \, .(\cos\theta + i\sin\theta)^{-4}$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos 4\theta + i\sin 4\theta$$



**سؤال 14** هل أن :

2016 - د (2) خارج القطر

$$\frac{(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^5}{(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)^2} - (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = 0$$

$$\frac{\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^2\right]^5}{\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^4\right]^2} - (\cos\theta + i\sin\theta)^2$$

$$\frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^{10}}{(\cos\theta + i\sin\theta)^8} - (\cos\theta + i\sin\theta)^2$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 - (\cos\theta + i\sin\theta)^2$$

$$= 0$$



**سؤال 15** جد الجذور التكعيبية للعدد $125i$ باستخدام مبرهنة ديموافر

2015 - د (1)

$Z = 0 + 125i \qquad (0,125) \; (x,y)$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$r = \sqrt{(0)^2 + (125)^2} \Rightarrow r = 125$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{125} = 0$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{125}{125} = 1$

$\theta = \frac{\pi}{2}$

$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} (\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{1}{n}}$

$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right]$

عندما $k = 0 \qquad \frac{\frac{\pi}{2} + 0}{3} = \frac{\pi}{6}$

$Z_1 = 125^{\frac{1}{3}} \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$Z_1 = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \Rightarrow Z_1 = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$

عندما $k = 1 \qquad \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} = \frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$

$Z_2 = 5\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$Z_2 = 5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \Rightarrow Z_2 = \frac{-5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$

$k = 2 \qquad \frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} = \frac{\frac{\pi + 8\pi}{2}}{3} = \frac{3\pi}{2}$

$Z_3 = 5\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

$Z_3 = 5(0 - i) \Rightarrow Z_3 = -5i$



**سؤال 16** جد الجذور التكعيبية للعدد المركب $(1 + i)^2$ على وفق مبرهنة ديموافر.

2015 - د (2)
خارج القطر

$Z = 1 + i \rightarrow Z = (1,1) \; (x,y)$ الربع الأول

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$r = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} \Rightarrow r = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

زاوية الأسناد

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta = \frac{\pi}{4}$

$Z^n = r^n (\cos\theta + i\sin\theta)^n$

$Z^n = \left(\sqrt{2}\right)^2 \left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]^2$

$Z^2 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}.2\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}.2\right)\right]$

$Z^2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$$Z^2 = 2(0+i) \Rightarrow Z^2 = 0+2i$$

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$$

الجذور التكعيبية $(Z^2)^{\frac{1}{3}}$

$$(Z^2)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right]^{\frac{1}{3}}$$

عندما $k=0 \quad \dfrac{\frac{\pi}{2}+0}{3} = \dfrac{\pi}{6}$

$$Z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\boxed{Z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)}$$

عندما $k=1 \quad \dfrac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} = \dfrac{\frac{\pi+4\pi}{2}}{3} = \dfrac{5\pi}{6}$

$$Z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$\boxed{Z_2 = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)}$$

عندما $k=2 \quad \dfrac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3} = \dfrac{\frac{\pi+8\pi}{2}}{3} = \dfrac{9\pi}{6} = \dfrac{3\pi}{6}$

$$Z_3 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\boxed{Z_3 = \sqrt[3]{2}(0-i)}$$




**سؤال 16** جد الصيغة القطبية للجذور الخمسة للعدد المركب $\left(\sqrt{3}+i\right)^2$ .

2014 - د (1)

$$Z = \sqrt{3}+i \rightarrow Z = \left(\sqrt{3}, 1\right) \quad (x, y)$$ الربع الأول

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4}$$

$$\boxed{r = 2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$$

زاوية الأسناد $\dfrac{\pi}{6}$ الربع الأول $\theta = \dfrac{\pi}{6}$

$$Z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

$$Z^2 = (2)^2\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right]^2$$

$$Z^2 = 4\left(\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

سيتم تعويض الذواب مباشرة بشكل مختصر

$$k = 0,1,2,3,4, \theta = \frac{\pi}{3}, r = 4, n = 5$$

الجذور الخمسة

$$k=0 \Rightarrow Z_1 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}\right)$$

$$k=1 \Rightarrow Z_2 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{7\pi}{15} + i\sin\frac{7\pi}{15}\right)$$

$$k=2 \Rightarrow Z_3 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{13\pi}{15} + i\sin\frac{13\pi}{15}\right)$$

$$k=3 \Rightarrow Z_4 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{19\pi}{15} + i\sin\frac{19\pi}{15}\right)$$

$$k=4 \Rightarrow Z_5 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{25\pi}{15} + i\sin\frac{25\pi}{15}\right)$$

$$= \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

لانستخرج قيم الـ cos sin لأنه طلب صيغة قطبية .

**سؤال 18** باستخدام مبرهنة ديموافر جد الجذور التكعيبية للعدد 8i

2015 - د (1) نازحين

2016 - د (1)

$Z = 0 + 8i \rightarrow (0,8)$ $(x,y)$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$r = \sqrt{(0)^2 + (8)^2} = \sqrt{0+64} \Rightarrow r = 8$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{8} = 0$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{8}{8} = 1$

$\theta = \frac{\pi}{2}$

$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$

عندما $k = 0$ , $\theta = \frac{\frac{\pi}{2}+0}{2} = \frac{\pi}{6}$

$Z_1 = 8^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$Z_1 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

$Z_1 = \left(\sqrt{3} + i\right)$

عندما $k = 1$ , $\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} = \frac{\frac{\pi+4\pi}{2}}{3} = \frac{5\pi}{6}$

$Z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

$Z_2 = \left(-\sqrt{3} + i\right)$

$k = 2$ , $\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3} = \frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$

$Z_3 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 2(0 - i)$

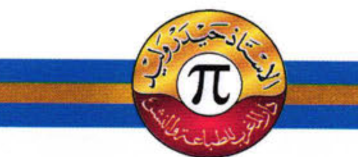
$Z_3 = -2i$

**سؤال 19** جد مجموعة حل المعادلة في مجموعة الاعداد لمركبة باستخدام مبرهنة ديموافر $x^3 - 8i = 0$ .

الجذر التربيعي $x^3 - 8i = 0 \Rightarrow x^3 = 8i$

$x = (8i)^{\frac{1}{3}}$

نفس الحل في سؤال ( 18 ) تماماً .



سؤال 20 باستخدام ديموافر احسب

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^{\frac{-3}{2}}$$

$\sqrt{3}+i \Rightarrow \left(\sqrt{3}+1\right)$ الربع الاول

أولاً: القوس كسر والبسط $\neq 1$ لذلك هذا السؤال مبرهنة + نتيجة

مبرهنة $\left[\left(\sqrt{3}+i\right)^{-3}\right]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \left(\sqrt{3}+i\right)^{-3}$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2}$$

$$=\sqrt{4} \Rightarrow \boxed{r=2}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-1}{2}$$

زاوية الاسناد $\frac{\pi}{6}$

$\theta =$ زاوية الاسناد $\Rightarrow \theta\frac{\pi}{6}$

$$Z^n=r^n\left[\cos\theta+i\sin\theta\right]^n$$

$$Z^{-3}=(2)^{-3}\left[\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right]^{-3}$$

$$Z^{-3}=\frac{1}{(2)^3}\left[\cos\frac{-\pi}{2}+i\sin\frac{-\pi}{2}\right]^{-3}$$

$$Z^{-3}=\frac{1}{8}\left[\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}\right]^{-3}$$

الان نرفع الناتج للأس $\frac{1}{2}$ وتحل نتيجة

$$\left(Z^{-3}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$r=2 \quad , \quad k=0,1 \quad , \quad \theta=\frac{\pi}{2}$$

$$r=\frac{1}{8}$$

$$k=0 \qquad \frac{\frac{\pi}{2}+2(0)\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$

$$Z_1=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$Z_1=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$$

$$k=1 \qquad \frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{2}=\frac{5\pi}{4}$$

$$Z_2=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$Z_2=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$Z_2=\frac{-1}{4}+\frac{1}{4}i$$

# الجذور التكعيبية للواحد الصحيح (الاوميكا) $\omega$

## الجزء الأول

(بالتكيعب) نفرض $x = \sqrt[3]{1}$

فرق بين مكعبين $x^3 = 1 \Rightarrow x^3 - 1 = 0$

$(x-1)(x^2+x+1) = 0$

**الجذر الأول** أما $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

بالدستور أو $x^2 + x + 1 = 0$

$a = 1 \quad , \quad b = 1 \quad , \quad c = 1$

قانون الدستور $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$$

**الجذر الثاني** $x \xrightarrow{+} x = \dfrac{-1 + \sqrt{3}\, i}{2} = \boxed{\dfrac{-1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i}$

**الجذر الثالث** $x \xrightarrow{-} x = \dfrac{-1 - \sqrt{3}\, i}{2} = \boxed{\dfrac{-1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} i}$

$$\sqrt[3]{1} = \{1 \ , \ \omega \ , \ \omega^2\}$$

*** خصائص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :**

1. الجذر الاول حقيقي والجذران الاخران تخيليان .
2. الجذران التخيليان مترافقان اي ان مرافق $\omega$ هو $\omega^2$ مرافق $\omega^2$ هو $\omega$
3. حاصل ضرب الجذور الثلاثة يساوي واحد .

   $(1)(\omega)(\omega^2) = \omega^3$

   مهم $\boxed{\omega^3 = 1}$
4. حاصل جمع الجذور تساوي صفر

   $\boxed{\omega^2 + \omega + 1 = 0}$

الجزء الثاني

# العلاقات الفرعية وتبسيط قوى ω

العلاقة الرئيسية $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

| | | |
|---|---|---|
| $\omega^2 = -\omega - 1$ | $\omega = -\omega^2 - 1$ | $1 = -\omega^2 - \omega$ |
| $\omega^2 + \omega = -1$ | $\omega^2 + 1 = -\omega$ | $\omega + 1 = -\omega^2$ |

* كل ركنين موجودات في السؤال بنفس الاشارة فناتجهما الركن الثالث بعكس الاشارة .

مثلاً

$$\omega^2 + \omega = -1$$

$$\omega + 1 = -\omega^2$$

$$-1 - \omega^2 = \omega$$

$$-\omega^2 - \omega = 1$$

$1 - \omega$ لا توجد علاقة فرعية لان الاشارات مختلفة .

* كل ركنين في السؤال اشارتهما مختلفة فهنا لا توجد علاقة فرعية تربطهم

$+\omega^2 - \omega \Rightarrow$ لا توجد علاقة فرعية

## تبسيط القوى ω

$$\omega^3 = 1$$

$$\omega^{\text{أس}} = (\omega^3)^{\text{ناتج القسمة}} \cdot \omega^{\text{باقي القسمة}}$$

($\omega^3$ دائماً تساوي واحد)

* كل ω مرفوعة الى أس من مضاعفات العدد 3 فناتجها يساوي واحد .
* إذا كان الاس سالب ننزله الى المقام ونبسطه والناتج الاخير يضرب بـ $\omega^3$ للاستفادة من خاصية عند القسمة تطرح الاسس .

**سؤال** بسط ما يأتي :

$$\omega^{11} = \left(\omega^3\right)^3 \cdot \omega^2 = \omega^2$$

$$\omega^{17} = \left(\omega^3\right)^5 \cdot \omega^2 = \omega^2$$

$$\omega^{18} = \left(\omega^3\right)^6 \cdot \omega^0 = 1$$

$$\omega^{100} = \left(\omega^3\right)^{33} \cdot \omega^1 = \omega$$

$$\omega^{-11} = \frac{1}{\omega^{11}} = \frac{1}{\left(\omega^3\right)^3 \cdot \omega^2} = \frac{1}{\omega^2}\left(\omega^3\right) = \omega$$

$$\omega^{-13} = \frac{1}{\omega^{13}} = \frac{1}{\left(\omega^3\right)^4 \cdot \omega^1} = \frac{1}{\omega}\left(\omega^3\right) = \omega^2$$

$$\omega^{-35} = \frac{1}{\omega^{35}} = \frac{1}{\left(\omega^3\right)^{11} \cdot \omega^2} = \frac{1}{\omega^2}\left(\omega^3\right) = \omega$$

**إستراحة شعرية :**

بنفسي مَن اغارُ عليه مني
وأحسد مقلةً نظراتِ اليهِ
ولو اني قدرتُ لطمستُ عنهَ
عيونَ الناسِ من حذري عليهِ




WWW.iQ-RES.COM
موقع طلاب العراق

الجزء الثالث

## ملاحظات عامة

**اولاً: العامل المشترك: يؤدي الى علاقة فرعية.**

مثلاً

1. $3\omega + 3\omega^2$

$= 3(\omega + \omega^2) = 3(-1) = -3$

2. $5 + 5\omega^2$

$= 5(1 + \omega^2) = 5(-\omega) = -5\omega$

3. $-3\omega - 3$

$= -3(\omega + 1)$

$= -3(-\omega^2) = 3\omega^2$

**إنتبه !**

عند سحب سالب عامل مشترك فان

سالب ÷ سالب = موجب

**ثانياً: وجود $\omega$ أو $\omega^2$ وحدها في المقام بدون شيء آخر نضرب الكسر بـ $\omega^3$ وهي تساوي واحد.**

مثلاً

1. $\frac{2}{\omega}(\omega^3) = 2\omega^2$

2. $\frac{5}{\omega^2}(\omega^3) = 5\omega$

3. $\frac{-7}{\omega}(\omega^3) = -7\omega^2$

4. $\frac{\sqrt{2}}{3\omega^2}(\omega^3) = \frac{\sqrt{2}}{3}\omega$

5. $\frac{2}{2+\omega} \Rightarrow \omega^3$ لا يمكن الضرب

لعدم الاستفادة من ذلك

**إنتبه !**

عند وجود رقم معامل جنب $\omega$ ، $\omega^2$ فهنا لا يؤثر لانه ثابت أما إذا كان بينهم + ، − فهنا يؤثر

رقم $\pm\ \omega$

رقم $\pm\ \omega^2$

لا نضرب الكسر بـ $\omega$

أنظر

أنظر

### ثالثاً: استخدام العلاقات الفرعية:

مثلاً

**1** $\omega^2 + 5 + \omega$

$= \underbrace{\omega^2 + \omega}_{\text{فرعية}=-1} + 5$

$= -1 + 5 = 4$

**2** $5 + 3\omega + 3\omega^2$ (عامل مشترك ثم علامة فرعية)

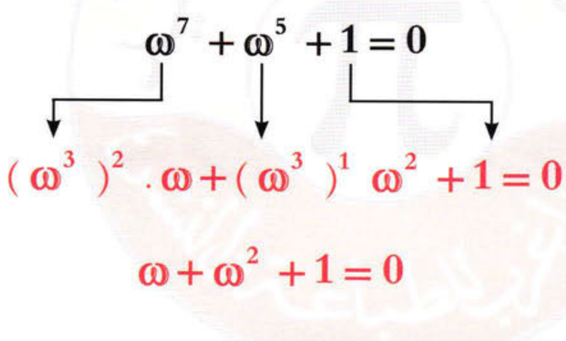
$= 5 + 3(\omega + \omega^2)$

$= 5 + 3(-1) = 2$

الجزء الرابع

## أنواع الأسئلة على الاوميكا $\omega$

سؤال 1 أثبت ان: $\omega^7 + \omega^5 + 1 = 0$



$(\omega^3)^2 . \omega + (\omega^3)^1 \omega^2 + 1 = 0$

$\omega + \omega^2 + 1 = 0$

$0 = 0$

$R.H.S = L.H.S$



سؤال 2 أثبت ان: $(5 + 3\omega + 3\omega^2)^2 = 4$

الطرف الايسر $= \left[5 + 3(\underbrace{\omega + \omega^2}_{\text{فرعية}})\right]^2$

$= \left[5 + 3(-1)\right]^2 = (5 - 3)^2$

$= (2)^2 = 4$ الطرف الايمن




أثبت ان : $-4(2+\omega+2\omega^2)^3 = 4$

الطرف الايسر $= -4(2+\omega+2\omega^2)^3$

ترتيب الحدود قبل سحب العامل المشترك $= -4\ (2+2\omega^2+\omega)^3$

$= -4\ \left[2(\underbrace{1+\omega^2}_{\text{فرعية}})+\omega\right]^3$

$= -4\ [2(-\omega)+\omega]^3$

$= -4(-2\omega+1\omega)^3$

$= -4(-\omega)^3$

الطرف الايمن $= 4\omega^3 = 4(1) = 4$

---




أثبت ان : $(1+\omega^2)^3+(1+\omega)^3 = -2$

الطرف الايسر $= (\underbrace{1+\omega^2}_{\text{فرعية}})^3 + (\underbrace{1+\omega}_{\text{فرعية}})^3$

$= (-\omega)^3 + (-\omega^2)^3$

**إنتبه !**
عند الرفع تضرب الاسس

$= -\omega^3 - \omega^6$

$= -\omega^3 - (\omega^3)^2$

الطرف الايمن $= -1-1 = -2$



سؤال 5 أثبت ان : $\left(1-\frac{2}{\omega^2}+\omega^2\right)\left(1+\omega-\frac{5}{\omega}\right)=18$

الطرف الايسر $=\left(1-\frac{2}{\omega^2}+\omega^2\right)\left(1+\omega-\frac{5}{\omega}\right)$

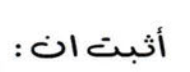
$=\left[\underbrace{1+\omega^2}_{\text{فرعية}}-\frac{2}{\omega^2}(\omega^3)\right]\left[\underbrace{1+\omega}_{\text{فرعية}}-\frac{5}{\omega}(\omega^3)\right]$

$=(-\omega-2\omega)(-\omega^2-5\omega^2)$

$=(-3\omega)(-6\omega^2)=18\omega^3$

$=18\ (1)=18=$ الطرف الايمن

سؤال 6 أثبت ان : $\left(\frac{1}{2+\omega}-\frac{1}{2+\omega^2}\right)^2=\frac{-1}{3}$

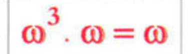



توحيد مقامات الطرف الايسر $=\left(\frac{1}{2+\omega}-\frac{1}{2+\omega^2}\right)^2$ ضرب

$=\left[\frac{(2+\omega^2)-(2+\omega)}{(2+\omega).(2+\omega^2)}\right]$

$=\left(\frac{\cancel{2}+\omega^2-\cancel{2}-\omega}{4+2\omega^2+2\omega+\omega^3}\right)^2=\left[\frac{\omega^2-\omega}{5+2(\omega^2+\omega)}\right]^2$

$\omega^3$ (1) ، $(\omega^2+\omega)$ فرعية $(-1)$


$\omega^3.\omega=\omega$

$=\left(\frac{\omega^2-\omega}{5+2(-1)}\right)^2=\frac{(\omega^2-\omega)^2}{(3)^2}=\frac{\omega^4-2\omega^3+\omega^2}{9}$

$=\frac{\omega+\omega^2-2}{9}=\frac{-3}{9}=\frac{-1}{3}=$ الطرف الايمن

## المعادلة التربيعية

القانون $x^2 - ($ مجموع الجذرين $) x + ($ حاصل ضرب الجذرين $) = 0$


سؤال كوّن المعادلة التربيعية التي جذراها:

**1** $1+\omega^2 \quad , \quad 1+\omega$

مجموع الجذرين $= (1+\omega^2) + (1+\omega)$ (فرعية ، فرعية)

$= -\omega - \omega^2$ فرعية

$= 1$

حاصل ضرب الجذرين $= (1+\omega^2)(1+\omega)$

$= 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3$ (فرعية)

$= \cancel{1} + (-\cancel{1}) + 1 = 1$

$x^2 - ($ مجموع الجذرين $) x + ($ حاصل ضرب الجذرين $) = 0$

$x^2 - 1x + 1 = 0$

**2** $1 - i\,\omega^2 \quad , \quad 1 - i\,\omega$

مجموع الجذرين $= (1 - i\,\omega^2) + (1 - i\,\omega)$

$= 2 - i\,\omega^2 - i\,\omega$

عامل مشترك $(-i)$

$= 2 - i\,(\omega^2 + \omega)$ فرعية

$= 2 - i\,(-1) = 2 + i$

حاصل ضرب الجذرين $= (1 - i\omega^2)(1 - i\omega)$

$= 1 - i\,\omega - i\,\omega^2 + i^2\,\omega^3$ ($i^2 = -1$) عامل مشترك

$= \cancel{1} - i(\omega + \omega^2) \cancel{-1}$

$= -i(-1) = i$

$x^2 - ($ مجموع الجذرين $) x + ($ حاصل ضرب الجذرين $) = 0$

$\Rightarrow x^2 - (2+i)\,x + i = 0$

**3** $\frac{3i}{\omega^2}$ , $\frac{-3\omega^2}{i}$

$$m = \frac{3i}{\omega^2}(\omega^3) = 3i\omega$$

$$L = \frac{-3\omega^2}{i} \cdot \frac{-i}{-i} \Rightarrow L = \frac{3\omega^2 i}{-i^2} \rightarrow (1)$$

$$L = 3\omega^2 i$$

مجموع الجذرين $= 3 i\omega + 3\omega^2 i$

$= 3i(\omega + \omega^2)$ فرعية

$= 3i(-1) = -3i$

حاصل ضرب الجذرين $= (3i\omega)(3i\omega^2)$

$= 9i^2 \omega^3$

$= 9(-1)(+1) = -9$

$x^2 - ($ مجموع الجذرين $)x + ($ حاصل ضرب الجذرين $) = 0$

$$x^2 - (-3i)x + (-9) = 0$$

**4** $\frac{\omega}{2-\omega^2}$ , $\frac{\omega^2}{2-\omega}$

مجموع الجذرين $= \frac{\omega}{2-\omega^2} + \frac{\omega^2}{2-\omega}$ توحيد مقامات

$$= \frac{\omega(2-\omega) + \omega^2(2-\omega^2)}{(2-\omega^2)(2-\omega)}$$

$$= \frac{2\omega - \omega^2 + 2\omega^2 - \omega^4}{4 - 2\omega - 2\omega^2 + \omega^3}$$ 

$\omega^4 \rightarrow \omega^3 . \omega = \omega$ ، $\omega^3 \rightarrow (1)$

$$= \frac{2\omega - \omega^2 + 2\omega^2 - \omega}{4 - 2\omega - 2\omega^2 + 1}$$

$$= \frac{\omega + \omega^2}{5 - 2\omega - 2\omega^2}$$

$$= \frac{2(\omega + \omega^2) + 1}{5 - 2(\omega + \omega^2)}$$

$$= \frac{-2 + 1}{5 - 2(-1)} = \frac{-1}{5+2} = \frac{-1}{7}$$

حاصل ضرب الجذرين $= \frac{\omega}{2-\omega^2} \cdot \frac{\omega^2}{2-\omega}$

$$= \frac{\omega^3}{4 - 2\omega - 2\omega^2 + \omega^3} = \frac{1}{7}$$

$x^2 - ($ مجموع الجذرين $)x + ($ حاصل ضرب الجذرين $) = 0$

$$x^2 - \left(\frac{-1}{7}\right)x + \left(\frac{1}{7}\right) = 0$$



تابعونا على التليكرام
@iQRES

## الأسئلة الوزارية حول موضوع ω



سؤال 1 جد المقياس والقيمة الأساسية لسعة العدد المركب $Z = \dfrac{4+2i\,\omega+2i\,\omega^2}{3-i\,\omega^2-i\,\omega}$

2016 تمهيدي

**الحل**

$$Z = \frac{4+2i\,\omega+2i\,\omega^2}{3-i\,\omega^2-i\,\omega}$$

$$Z = \frac{4+2i\,(\omega+\omega^2) \rightarrow}{3-i\,\omega^2+\,\omega \;\rightarrow}$$ فرعية / فرعية

$$Z = \frac{4+2i(-1)}{3-i(-1)} = \frac{4-2i}{3+i}$$

$$Z = \frac{4-2i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i}$$

$$Z = \frac{12-4i-6i+2i^2}{9+1}$$ ($2i^2 \rightarrow (-2)$)

$$Z = \frac{10-10i}{10} = \frac{10}{10} - \frac{10}{10}i$$

$$Z = 1-i \Rightarrow Z = (1\,,\,-1)$$ الربع الرابع

$$\|Z\| = r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$= \sqrt{(1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$$

المقياس $\Rightarrow \boxed{r = \sqrt{2}}$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

زاوية الاسناد $\dfrac{\pi}{4}$

$\theta = 2\pi -$ زاوية الاسناد

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4}$$

القيمة الاساسية لسعة العدد المركب Z $\boxed{\theta = \dfrac{7\pi}{4}}$



سؤال 2 أثبت ان $\left(5-\frac{5}{\omega^2+1}+\frac{3}{\omega^2}\right)^6 = 64$

(2016 - د (1))

الطرف الايسر $=\left(5-\frac{5}{\omega^2+1}+\frac{3}{\omega^2}\right)$

فرعية

$=\left(5-\frac{5}{-\omega}+\frac{3}{\omega^2}\right)^6=\left[5+\frac{5}{\omega}(\omega^3)+\frac{3}{\omega^2}.\omega^3(\omega^3)\right]^6$

$=(5+5\,\omega^2+3\,\omega)^6$

$=\left(5\,(1+\omega^2)+3\,\omega\right)^6$

فرعية 1-

$=(-5\,\omega+3\,\omega)^6=2^6(-2\,\omega)^6\;.\;\omega^6 \qquad =64\,(1)=64$

∴ الطرف الايسر = الطرف الايمن





**سؤال 3** باستخدام مبرهنة ديموافر جد الجذور التربيعية للعدد

2016 - د (2)

$$Z = \frac{1+\omega i+\omega^2 i}{1-\omega i-\omega^2 i}$$

**الحل**

$$Z = \frac{1+i(\omega+\omega^2) \rightarrow \text{فرعية}}{1-i(\omega+\omega^2) \rightarrow \text{فرعية}}$$

$$= \frac{1+i(-1)}{1-i(-1)} = \frac{1-i}{1+i}$$

$$Z = \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}$$

$$Z = \frac{1-i-i-1}{(1)^2+(1)^2} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$Z = 0-i \Rightarrow Z = (0, -1)$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$r = \sqrt{(0)^2+(-1)^2} = \sqrt{1} \Rightarrow \boxed{r=1}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{1} = -1$$

زاوية الاسناد $\frac{3\pi}{2}$

* زاوية الاسناد $\frac{3\pi}{2}$ لا تنتمي لأي ربع فتبقى نفسها $\theta$

$$\boxed{\theta = \frac{3\pi}{2}}$$

الاركان الاربعة:

$$r = 1,\ \theta = \frac{3\pi}{2},\ n = 2,\ k = 0, 1$$

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$$

عندما $K = 0$

$$\frac{\theta+2k\pi}{n} = \frac{\frac{3\pi}{2}}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

$$Z_1 = (1)^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right]$$

$45 \times 3 = 135$ في الربع الثاني

$$Z_1 = 1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$\boxed{Z_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i}$$

عندما $k = 1$

$$\frac{\theta+2k\pi}{2} = \frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi}{2}$$

$$= \frac{7\pi}{4}$$

$7 \times 45 = 315$ الربع الرابع

$$Z_2 = (1)^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right]$$

$$Z_2 = \left(+\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$





سؤال 4 إذا كان $Z^2+Z+1=0$ جد قيمة $\dfrac{1+3Z^{10}+3Z^{11}}{1-3Z^7-3Z^8}$

وزاري/كتاب

الحل

$$Z^2+Z+1=0$$

$$a=1 \,.\, b=1 \,,\, c=1$$

قانون الدستور

$$Z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$Z=\frac{-1\pm\sqrt{(1)^2-4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{-4}}{2}$$

$$Z=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$$

أما $Z=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}=\dfrac{-1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\omega$

أو $Z=\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}=\dfrac{-1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\omega^2$

بوضع $Z=\omega$

$$\frac{1+3Z^{10}+3Z^{11}}{1-3Z^7-3Z^8}$$

$$\frac{1+3\omega^{10}+3\omega^{11}}{1-3\omega^7-3\omega^8}$$

$$=\frac{1+3(\omega^3)^3\,.\,\omega+3(\omega^3)^3\,.\,\omega^2}{1-3(\omega^3)^2\,.\,\omega-3(\omega^3)^2\,.\,\omega^2}$$

$$=\frac{1+3\omega+3\omega^2}{1-3\omega-3\omega^2}$$

$$\frac{1+3(\omega+\omega^2)}{1-3(\omega+\omega^2)}=\frac{1-3}{1+3}$$

$$=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

بوضع $Z=\omega^2$

$$=\frac{1+3(\omega^2)^{10}+3(\omega^2)^{11}}{1-3(\omega^2)^7-3(\omega^2)^8}$$

$$=\frac{1+3\omega^{20}+3\omega^{22}}{1-3\omega^{14}-3\omega^{16}}$$

$$=\frac{1+3(\omega^3)^6.\,\omega^2+3(\omega^3)^7.\omega}{1-3(\omega^3)^4.\,\omega^2-3(\omega^3)^5.\omega}$$

$$=\frac{1+3\omega^2+3\omega}{1-3\omega^2-3\omega}$$

$$=\frac{1+3(\omega^2+\omega)}{1-3(\omega^2+\omega)}$$

$$=\frac{1-3}{1+3}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

WWW.iQ-RES.COM

الموقع التعليمي الاول على مستوى العراق




( ... شارك رابط موقعنا ... )
مع اصدقائك لتعم الفائدة
ولا تنسونا من صالح دعائكم







كل ما ينشر في موقعنا من محتوى هو مجاني ولخدمة الطالب العراقي

© WWW.iQ-RES.COM

# الفصل الثاني

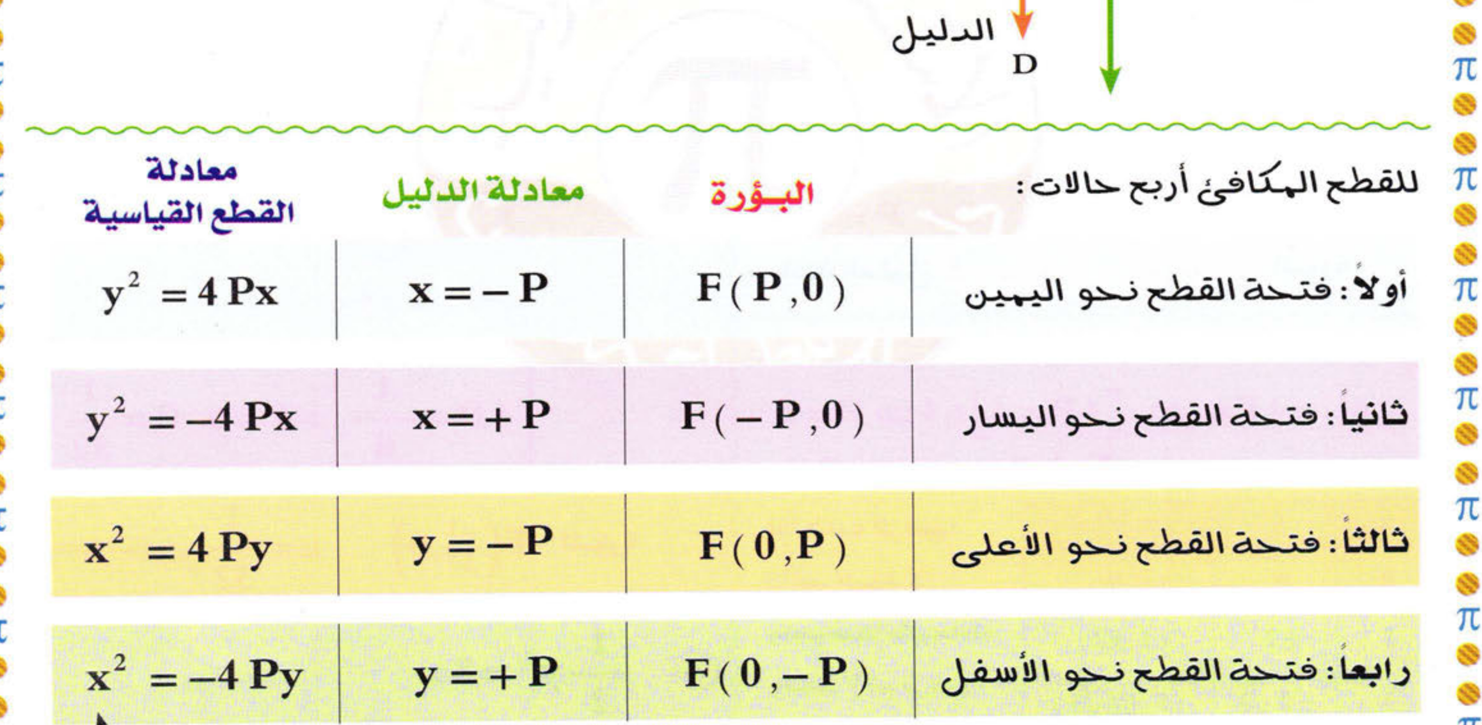
# القطع المكافئ

صفحاتنا على الفيس بوك
/ iQRES
/ NTAAj.iQ

## القطع المكافئ

هو مجموعة النقاط في المستوي والتي يكون بعد كل منها عن نقطة ثابتة $F(P,0)$ تسمى البؤرة حيث $(P > 0)$ مساوياً دائماً لبعدها عن مستقيم معلوم $(D)$ يسمى الدليل لا يحوي البؤرة .

البعد بين بؤرة ودليل القطع المكافئ = $2P$



للقطع المكافئ أربع حالات :

| | البؤرة | معادلة الدليل | معادلة القطع القياسية |
|---|---|---|---|
| **أولاً** : فتحة القطع نحو اليمين | $F(P,0)$ | $x = -P$ | $y^2 = 4Px$ |
| **ثانياً** : فتحة القطع نحو اليسار | $F(-P,0)$ | $x = +P$ | $y^2 = -4Px$ |
| **ثالثاً** : فتحة القطع نحو الأعلى | $F(0,P)$ | $y = -P$ | $x^2 = 4Py$ |
| **رابعاً** : فتحة القطع نحو الأسفل | $F(0,-P)$ | $y = +P$ | $x^2 = -4Py$ |

**ملاحظة** حول معادلة القطع المكافئ القياسية :

1. تحتوي على متغيرين $y$،$x$ أحدهما تربيع والاخر اس $(1)$ .
2. القطع على محور المتغير الذي لا يحتوي تربيع .
3. معامل متغير التربيع = 1 . أنظر إلى معامل $x^2$ و $y^2$ في المعادلات كلها = 1 .

## إذا طلب البؤرة والدليل

**مثال** جد البؤرة ومعادلة الدليل لكل من القطوع المكافئ الآتية :

**1** $y^2 = -8x$

$y^2 = -4Px \Rightarrow [4P = 8] \div 4 \Rightarrow P = 2$

البؤرة $F(-2,0)$ معادلة الدليل $x = +2$

**2** $x^2 = 4y$

$x^2 = 4Py \Rightarrow [4P = 4] \div 4 \Rightarrow P = 1$

البؤرة $F(0,1)$ , معادلة الدليل $y = -1$

**3** $2x + 16y^2 = 0$

$[16y^2 = -2x] \div 16$

$y^2 = \frac{-1}{8}x$ نحو اليسار

$y^2 = -4Px$

$\left[4P = \frac{1}{8}\right] \div 4 \Rightarrow P = \frac{1}{32}$

البؤرة $F\left(\frac{-1}{32}, 0\right)$ , معادلة الدليل $x = \frac{1}{32}$

**4** $\frac{1}{2}y^2 = 8x$

نضرب المعادلة اعلاه في $(2)$ لجعل معامل $y^2$ يساوي واحد حسب ملاحظات معادلة القطع المكافئ القياسية .

$y^2 = 16x$

$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 16] \div 4$ يمين

$P = 4$

البؤرة $F(4,0)$ , معادلة الدليل $x = -4$

**5** $\frac{1}{5}x - y^2 = 0$

$\frac{1}{5}x = y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{5}x$ نحو اليمين

$y^2 = 4Px$

$\left[4P = \frac{1}{5}\right] \div 4$

$P = \frac{1}{20}$

البؤرة $F\left(\frac{1}{20}, 0\right)$ , معادلة الدليل $x = \frac{-1}{20}$

**6** $3x^2 - 24y = 0$

$[3x^2 = 24y] \div 3 \Rightarrow x^2 = 8y$

$x^2 = 4Py$

$[4P = 8] \div 4 \Rightarrow P = 2$

البؤرة $F(0,2)$ , معادلة الدليل $y = -2$

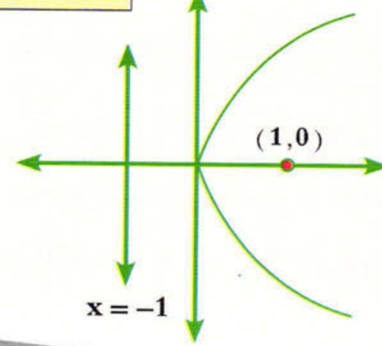
**7** $y^2 = 4x$

$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 4] \div 4 \Rightarrow P = 1$

$F(1,0)$ , $x = -1$

إذا طلب الرسم :
نأخذ قيم لـ $x$
ونعوضها بالمعادلة
ونجد $y$ ثم نرسم .

| x | y | (x,y) |
|---|---|---|
| 0 | 0 | (0,0) |
| 1 | $\pm 2$ | $(1, \pm 2)$ |
| 3 | $\pm 2\sqrt{3}$ | $(3, \pm 2\sqrt{3})$ |



**أولاً** : إذا أعطى بؤرة القطع المكافئ F معناها أعطى P

1. نختار المعادلة المناسبة حسب البؤرة .
2. نعوض P مباشرة ← **إنتبه !** نعوض P موجبة دائماً في المعادلة القياسية .

**مثال 1** جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (0,5) ورأسه نقطة الاصل .

$F(0,5) \rightarrow$ أعلى $\rightarrow P=5$

$x^2=4Py$

$x^2=4(5)y \Rightarrow x^2=20y$

**مثال 4** جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته (0,-4) .

$(0,-4) \rightarrow$ أسفل $\rightarrow P=4$

$x^2=-4Py$

$x^2=-4(4)y \Rightarrow x^2=-16y$

**مثال 2** جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (3,0) ورأسه نقطة الاصل .

$F(3,0) \rightarrow$ يمين $\rightarrow P=3$

$y^2=4Px$

$y^2=4(3)x \Rightarrow y^2=12x$

**مثال 5** جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (5,0) ورأسه نقطة الاصل .

$(5,0) \Rightarrow$ يمين $\Rightarrow P=5$

$y^2=4Px$

$y^2=4(5)x \Rightarrow y^2=20x$

**مثال 3** جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته $(0,\sqrt{2})$ .

$F(0,\sqrt{2}) \rightarrow$ أعلى $\rightarrow P=\sqrt{2}$

$x^2=4Py$

$x^2=4(\sqrt{2})y \Rightarrow x^2=4\sqrt{2}y$

**مثال 6** جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (-4,0) ورأسه نقطة الاصل .

$(-4,0) \rightarrow$ يسار $\rightarrow P=4$ نعوض (+)

$y^2=-4Px \Rightarrow y^2=-16x$

**ثانياً** : إذا أعطى معادلة الدليل معناها أعطى (P) وتذكر ان اشارة الدليل عكس اشارة البؤرة .

مثلاً : إذا اعطى معادلة الدليل

$x=+3$ البؤرة سالبة لأن الدليل + ((القطع يسار X))

$y=-5$ البؤرة موجبة لأن الدليل - ((القطع أعلى Y))

$x=-\sqrt{2}$ البؤرة موجبة لأن الدليل - ((القطع يمين X))








**مثال 7** جد معادلة القطع المكافئ الذي معادلة دليله $y = 7$ والرأس نقطة الاصل .

$y = 7 \rightarrow P = 7$

البؤرة سالبة لأن الدليل (+) / أسفل (y)

$x^2 = -4Py$

$x^2 = -4(7)y$

$x^2 = -28y$

**مثال 8** جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ومعادلة دليله $2x - 6 = 0$.

$2x - 6 = 0$

$[2x = 6] \div 2 \Rightarrow x = 3$

البؤرة سالبة لأن الدليل موجب $P = 3$

$y^2 = -4Px \Rightarrow y^2 = -4(3)x$

$y^2 = -12x$

**مثال 9** جد معادلة القطع المكافئ الذي معادلة دليله $4y + 3 = 0$ ورأسه نقطة الاصل .

$4y + 3 = 0$

$[4y = -3] \div 4 \Rightarrow y = \frac{-3}{4}$

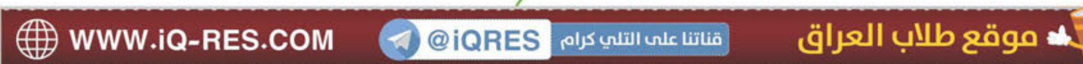
البؤرة موجبة لأن الدليل سالب

$P = \frac{3}{4}$

$x^2 = 4Py \Rightarrow x^2 = 4\left(\frac{3}{4}\right)y$

$x^2 = 3y$

**إنتبه !** لاتنسى ان تعويض P يكون موجب دائماً في المعادلة القياسية




**ملاحظة ومثال** إذا أعطى في السؤال نقطتين وقا ان القطع يمر بالنقطتين فإن خطوات لحل هي :

1. نعين النقاط في الارباع لتحديد فتحة القطع .
2. نختار المعادلة المناسبة حسب فتحة القطع .
3. نعوض واحدة من النقاط بـ x , y ونجد P ونعوض (P) بالمعادلة القياسية .

**مثال 10**

جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين (2,-4) ، (2,4) والرأس نقطة الاصل .

أول

رابع

(2,4) ← ربع أول

(2,-4) ← ربع رابع

القطع نحو اليمين .

$y^2 = 4Px$ ← تعويض (x,y) (2,4)

$(4)^2 = 4P(2)$

$[16 = 8P] \div 8 \Rightarrow P = 2$

$y^2 = 8x$

**مثال 11**

جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين (2,5) , (2,-5) والرأس نقطة الاصل .

(2,5) ← ربع أول

(2,-5) ← ربع رابع

القطع نحو اليمين .

$y^2 = 4Px$ (2,5)

$(5)^2 = 4(P)(2)$

$[25 = 8P] \div 8 \Rightarrow P = \frac{25}{8}$

$y^2 = 4\left(\frac{25}{8}\right)x \Rightarrow y^2 = \frac{25}{2}x$

**مثال 12**

جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر من $(-1,2)$ $(\sqrt{3},6)$ ولأسه نقطة الاصل ... اضافي .

$(\sqrt{3},6)$ ربع أول

$(-1,2)$ ربع ثاني

القطع نحو الأعلى .

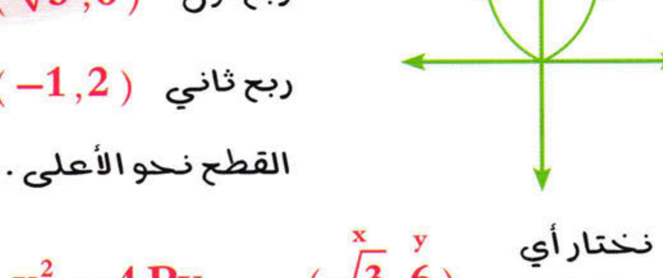
نختار أي نقطة

$x^2 = 4Py$ $(\overset{x}{\sqrt{3}},\overset{y}{6})$

$(\sqrt{3})^2 = 4P(6)$

$[3 = 24P] \div 24 \Rightarrow P = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$

$x^2 = 4\left(\frac{1}{8}\right)y \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}y$



إستراحة شعرية:

رَماكَ الحاسدونَ بكُلِ عَيبٍ

وعيبكُ أنّ حسنك لا يُعابُ

**ملاحظة ومثال** إذا أعطى نقطة واحدة فقط $(x, y)$ وقال ان القطع يمر من النقطة $(x, y)$ هناك حالتان :

**الأولى** ان يحدد موقع البؤرة ( على محور السينات أو الصادات ) وهنا يوجد معادلة واحدة للقطع ⟵ تابع المثال .

**مثال 13** جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر من النقطة $(-1,8)$ وبؤرته على محور السينات ورأسه نقطة الأصل . . . اضافي .

$(-1,8) \rightarrow$ ربع ثاني

البؤرة سينات ⟵ يسار

$y^2 = -4Px \qquad (-1,8)$

$8^2 = -4P(-1)$

$64 = 4P \Rightarrow P = \frac{64}{4} \Rightarrow P = 16$

$y^2 = -4(16)x \Rightarrow y^2 = -64x$

**مثال 14** جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر من النقطة $(\sqrt{2}, 1)$ وبؤرته على محور الصادات . . . اضافي .

$(\sqrt{2}, 1) \rightarrow$ ربع أول

البؤرة صادات ⟵ أعلى

$x^2 = 4Py \qquad (\sqrt{2}, 1)$

$(\sqrt{2})^2 = 4P(1)$

$[2 = 4P] \div 4 \Rightarrow P = \frac{1}{2}$

$x^2 = 4\left(\frac{1}{2}\right)y \Rightarrow x^2 = 2y$

**الثانية** لا يحدد موقع البؤرة لذلك هناك احتمالين
- بؤرة سينات
- بؤرة صادات

**مثال 15** جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر من النقطة $(-4, -2)$ ورأسه نقطة الأصل .

بؤرة سينات / يسار

$y^2 = -4Px$

$(-4)^2 = -4P(-2)$

$[16 = 8P] \div 8 \Rightarrow P = \frac{16}{8} \Rightarrow P = 2$

$y^2 = -8x$

بؤرة صادات / اسفل

$x^2 = -4Py$

$(-2)^2 = -4P(-4)$

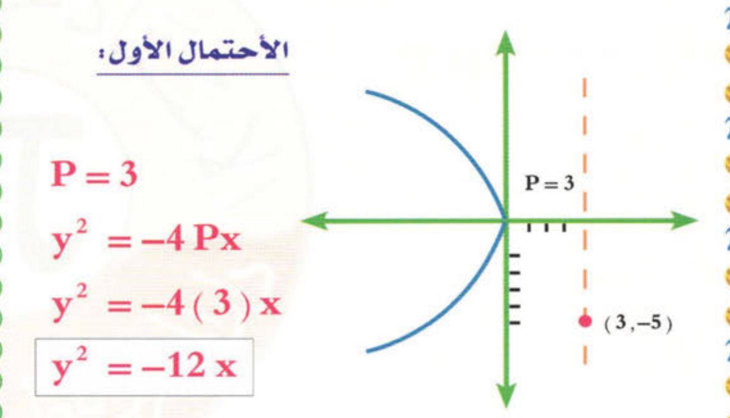
$[4 = 16P] \div 16 \Rightarrow P = \frac{4}{16} \Rightarrow P = \frac{1}{4}$

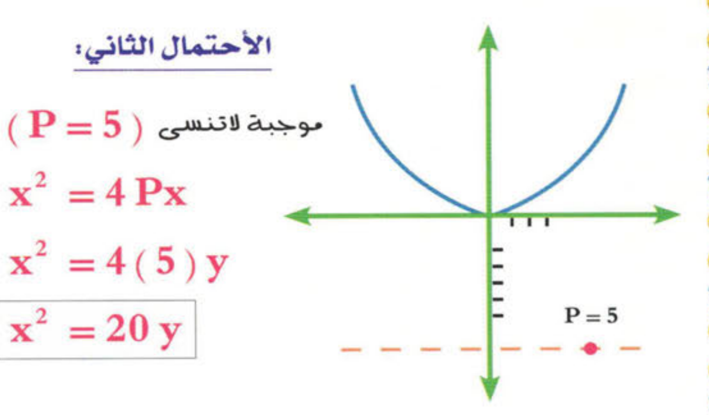
$x^2 = -4\left(\frac{1}{4}\right)y \Rightarrow x^2 = -y$

**ملاحظة ومثال** إذا أعطى في السؤال نقطة $(x, y)$ وقال ان دليل القطع يمر من هذه النقطة.

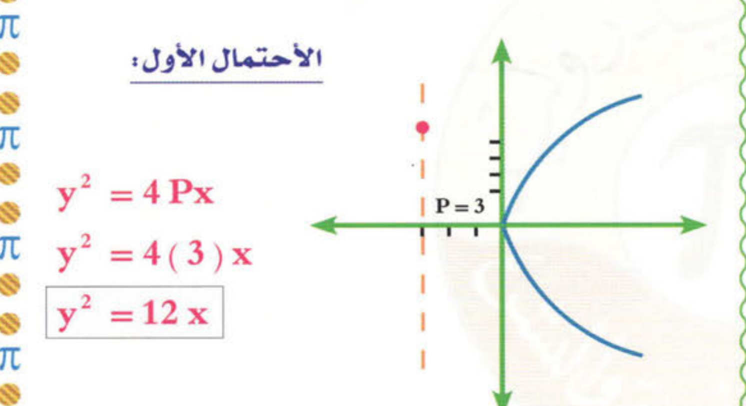
**إنتبه !** لا نعوض هذه النقطة أبداً في معادلة القطع المكافئ القياسية لأن القطع لا يمر بها ولا تحققت معادلة القطع.

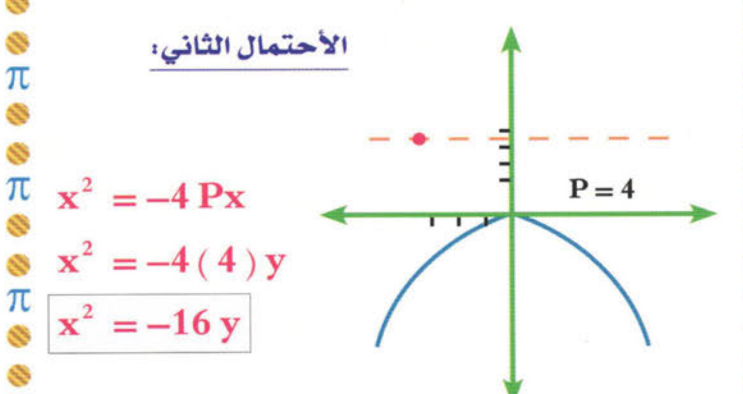
**مثال 16** جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر دليل القطع بالنقطة $(3,-5)$.



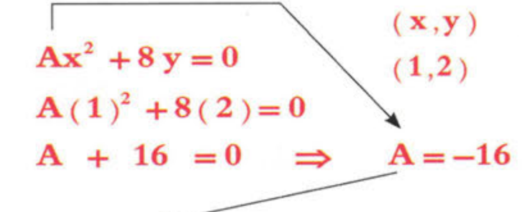

**مثال 17** إذا كان دليل القطع المكافئ يمر بالنقطة $(-3,4)$ والرأس نقطة الأصل جد معادلة القطع.






قطع مكافئ معادلته $Ax^2 + 8y = 0$ ويمر من النقطة $(1,2)$ جد قيمة $(A)$ ثم جد البؤرة والدليل وارسم القطع .



$(x,y)$

$(1,2)$

$$Ax^2 + 8y = 0$$

$$A(1)^2 + 8(2) = 0$$

$$A + 16 = 0 \Rightarrow A = -16$$

$$-16x^2 + 8y = 0 \Rightarrow \left[-16x^2 = -8y\right] \div -16$$

$$\frac{-16x^2}{-16} = \frac{-8y}{-16} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}y$$ أعلى

$$x^2 = 4Py$$

$$\left[4P = \frac{1}{2}\right] \div 4$$

$$P = \frac{1}{8}$$

البؤرة $F\left(0, \frac{1}{8}\right)$



معادلة الدليل $y = \frac{-1}{8}$

$F\left(0, \frac{1}{8}\right)$

$y = \frac{-1}{8}$

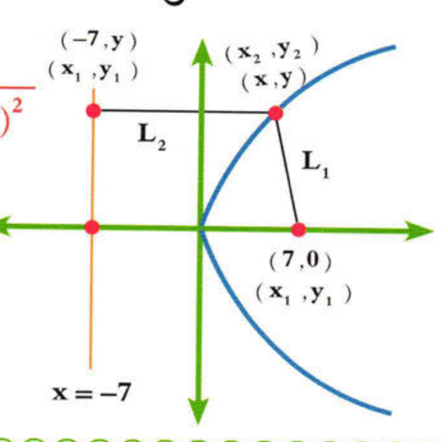
Notes:



WWW.iQ-RES.COM
موقع طلاب العراق

## إيجاد معادلة القطع المكافئ باستخدام التعريف

**مثال 19** باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(7,0)$ والرأس نقطة الأصل .




$L_1 = L_2$ حسب التعريف

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$\sqrt{(x-7)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x+7)^2+(y-y)^2}$$ بالتربيع

$$x^2-14x+49+y^2 = x^2+14x+49+0^2$$

مربع حدانية — مربع حدانية

$$y^2 = 14x+14x \Rightarrow y^2 = 28x$$

**مثال 20** جد معادلة القطع المكافئ الذي معادلة دليله $y=\sqrt{3}$ باستخدام التعريف .

(x1 y1)
(x ,√3)
y = √3
L2
(x ,y)
(x2 ,y2)
L1
(0 ,−√3)
(x1 ,y1)

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$\sqrt{(x-0)^2+(y+\sqrt{3})^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y-\sqrt{3})^2}$$

بالتربيع

$$x^2+y^2+2\sqrt{3}y+3 = 0^2+y^2-2\sqrt{3}y+3$$

$$x^2 = -2\sqrt{3}y-2\sqrt{3}y \Rightarrow x^2 = -4\sqrt{3}y$$

**مثال 21** باستخدام التعريف جد معادلة قطع مكافئ بؤرته $(\sqrt{3},0)$ والرأس نقطة الأصل .

x = √3
(x2 ,y2)
(x ,y)
L2
L1
(−√3 ,y)
(x1 ,y1)
(x1 ,y1)
(√3 ,0)

$L_1 = L_2$ حسب التعريف

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x+\sqrt{3})^2+(y-y)^2}$$

بالتربيع

$$x^2-2\sqrt{3}x+3+y^2 = x^2+2\sqrt{3}x+3+0$$

$$y^2 = 4\sqrt{3}x$$

## الأسئلة الوزارية حول موضوع القطع المكافئ

**سؤال 1** جد معادلة القطع مكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $(-3,6)$ , $(3,6)$ ثم جد معادلة دليله.

2006 - د (1)

$(3,6) \rightarrow$ ربع أول

$(-3,6) \rightarrow$ ربع رابع

$x^2 = 4Py$ ((نحو الأعلى))

$(x,y)$

$(3,6)$

تعريف

$(3)^2 = 4P(6)$

$9 = 24P \Rightarrow P = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$

$x^2 = 4\left(\frac{3}{8}\right)y \Rightarrow \boxed{x^2 = \frac{3}{2}y}$

معادلة الدليل $y = -P \Rightarrow y = -\frac{3}{8}$

**سؤال 2** جد معادلة القطع مكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $(1,3)$ , $(1,-3)$ ثم جد معادلة دليله.

2006 - د (2)

$(1,3)$

$(3,6) \rightarrow$ ربع أول

$(1,-3)$

$(-3,6) \rightarrow$ ربع رابع

((نحو اليمين))

$y^2 = 4Px$

تعويض

$(3)^2 = 4P(1)$

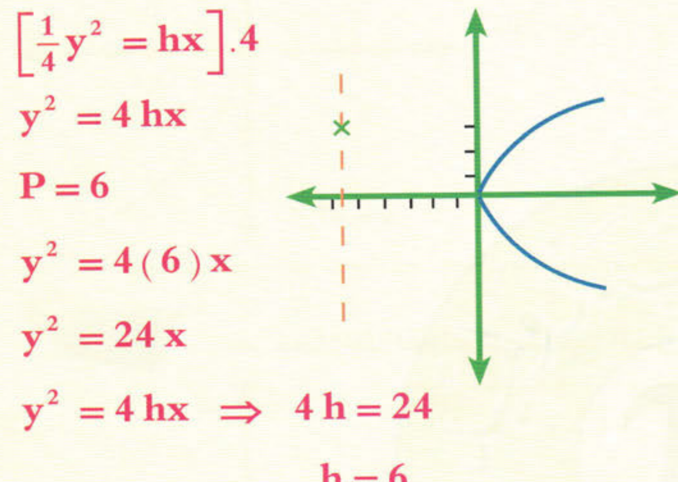
$[9 = 4P] \div 4 \Rightarrow P = \frac{9}{4}$

$y^2 = 4\left(\frac{9}{4}\right)x \Rightarrow y^2 = 9x$

معادلة الدليل $x = -P \rightarrow x = \frac{-9}{4}$

**سؤال 3** قطع مكافئ معادلته $\frac{1}{4}y^2 = hx$ دليله يمر بالنقطة $(-6,3)$ جد قيمة $h$.

2008 تمهيدي



$\left[\frac{1}{4}y^2 = hx\right].4$

$y^2 = 4hx$

$P = 6$

$y^2 = 4(6)x$

$y^2 = 24x$

$y^2 = 4hx \Rightarrow 4h = 24$

$h = 6$

**ملاحظة**

عرفنا ان القطع على محور السينات لأن المعدلة بدلالة $(y^2)$.
ولا يمكن تعويض النقطة $(-6,3)$ لأن الذي يمر بها الدليل وليس القطع.


موقع طلاب العراق
WWW.iQ-RES.COM


**إستراحة شعرية:**

فيا ليتَ الذي بيني وبينك بابٌ يطرقُ
وياليتَ أطرافَ الأرض تُطوى فنلتقي

# انسحاب المحاور للقطع المكافئ

## أولاً معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور السينات ورأسه $o\ (h,k)$

**1 الفتحة لليمين:**

المعادلة القياسية $(y-k)^2 = 4P(x-h)$

الرأس $\overline{o}\ (h,k)$

البؤرة $\overline{F}\ (P+h,k)$

معادلة الدليل $\overline{x} = -P+h$

معادلة المحور $\overline{y} = k$

**2 الفتحة لليسار:**

المعادلة القياسية $(y-k)^2 = -4P\ (x-h)$

الرأس $\overline{o}\ (h,k)$

البؤرة $\overline{F}\ (-P+h,k)$

معادلة الدليل $\overline{x} = P+h$

معادلة المحور $\overline{y} = k$

## ثانياً معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور الصادات ورأسه $o\ (h,k)$

**1 الفتحة للأعلى:**

المعادلة القياسية $(x-h)^2 = 4P\ (y-k)$

الرأس $\overline{o}\ (h,k)$

البؤرة $\overline{F}\ (h,\ P+k)$

معادلة الدليل $\overline{y} = -P+k$

معادلة المحور $\overline{x} = h$

**2 الفتحة للأسفل:**

المعادلة القياسية $(x-h)^2 = -4P(y-k)$

الرأس $\overline{o}\ (h,k)$

البؤرة $\overline{F}\ (h,-P+k)$

معادلة الدليل $\overline{y} = P+k$

معادلة المحور $\overline{x} = h$

**مثال 1**

جد الرأس والبؤرة ومعادلتي المحور والدليل للقطع المكافئ :

$$(y+1)^2 = 4\,(x-2)$$

$h=2 \quad , \quad k=-1$

$[4P=4] \div 4 \Rightarrow P=1$

الرأس: $\bar{o}\,(h,k) \Rightarrow (2,\ -1)$

البؤرة: $\bar{F}\,(P+h,\ k)$

$\bar{F}\,(1+2,\ -1) \Rightarrow \bar{F}\,(3,\ -1)$

معادلة الدليل: $x=-P+h$

$x=-1+2 \Rightarrow x=1$

معادلة المحور: $y=k$

$y=-1$

**مثال 2**

جد الرأس والبؤرة ومعادلتي المحور والدليل للقطع المكافئ :

$$(x-1)^2 = 8\,(y-1)$$

$h=1 \quad , \quad k=1$

$[4P=8] \div 4 \Rightarrow P=2$

الرأس: $\bar{o}\,(h,\ k) \Rightarrow (1,\ 1)$

البؤرة: $\bar{F}\,(h,\ P+k)$

$\bar{F}\,(1,\ 2+1) \Rightarrow \bar{F}\,(1,\ 3)$

معادلة الدليل: $y=-P+k$

$y=-2+1 \Rightarrow y=-1$

معادلة المحور: $x=h$

$x=1$

** ملاحظة حول استخراج قيم h ، k من معادلة القطع المكافئ القياسية :

**مثال توضيحي**

$$(y+1)^2 = 4\,(x-2)$$

الرقم الذي داخل قوس x يمثل قيمة h دائماً ولكن نعكس اشارته فهنا الرقم 2- فتكون h=2

الرقم الذي داخل قوس y يمثل قيمة k دائماً ولكن نعكس اشارته فهنا الرقم 1+ فتكون k=-1

**مثال 3** ناقش القطع المكافئ $y = x^2 + 4x$

أولاً: اجعل المتغير الذي يحوي التربيع وكل ما يتعلق به في طرف والمتغير الذي لا يحوي التربيع في طرف اخر (وهذه الخطوة متحققة في هذا المثال ولا تحتاج الى ترتيب)

$$y = x^2 + 4x$$

ثانياً: نقوم بالنظر الى المتغير الذي يحوي التربيع وهنا هو المتغير X ثم نذهب لنأخذ نصف معامل X وليس $X^2$ ونقوم بتربيعه واضافته للطرفين فهنا معامل X هو 4 نأخذ نصفه وهو 2 وتربيع 2 هو 4 حيث نضيف الرقم 4 للطرفين كما موضح داخل الدائرة

$$y + 4 = x^2 + 4x + 4$$

ثالثاً: نحلل الطرف الذي يحوي التربيع مربع كامل وتصبح المعادلة بالشكل القياسي.

$$(y+4) = (x+2)^2$$

$$(x+2)^2 = (y+4)$$

$$h = -2 \quad , \quad k = -4$$

$$[4P = 1] \div 4 \Rightarrow P = \frac{1}{4}$$

$$\bar{o}\ (h, k) \Rightarrow (-2, -4)$$ الرأس

$$\bar{F}\ (h, P+k) \Rightarrow \left(-2\ ,\ \frac{1}{4} - 4\right)$$ البؤرة

$$\bar{F}\left(-2\ ,\ -3\frac{3}{4}\right)$$

$$\bar{y} = -P + k$$ معادلة الدليل

$$\bar{y} = -\frac{1}{4} - 4 \Rightarrow \bar{y} = -4\frac{1}{4}$$

$$\bar{x} = h$$ معادلة المحور

$$\bar{x} = -2$$

**4 مثال** جد الرأس والبؤرة ومعادلتي المحور والدليل للقطع المكافئ :

$$y^2 + 4y + 2x = -6$$

$$y^2 + 4y = -6 - 2x$$

نضيف مربع نصف معامل y للطرفين

$$y^2 + 4y + 4 = -6 - 2x + 4$$

$$(y+2)^2 = -2x - 2$$

معادلة القطع القياسية $\boxed{(y+2)^2 = -2(x+1)}$

$$k = -2 \quad , \quad h = -1$$

$$[4P = 2] \div 4 \Rightarrow P = \frac{1}{2}$$

الرأس: $\bar{o}(h,k) \Rightarrow (-1,-2)$

البؤرة: $\bar{F}(-P+h,k)$

$$\bar{F}\left(-\frac{1}{2}-1,-2\right) \Rightarrow \bar{F}\left(-\frac{3}{2},-2\right)$$

معادلة الدليل: $\bar{x} = P + h$

$$\bar{x} = \frac{1}{2} - 1 \Rightarrow \bar{x} = \frac{-1}{2}$$

معادلة المحور: $\bar{y} = k$

$$\bar{y} = -2$$

**5 مثال** جد الرأس والبؤرة ومعادلتي المحور والدليل للقطع المكافئ :

$$x^2 + 6x - y = 0$$

$$x^2 + 6x = y$$

$$x^2 + 6x + 9 = y + 9$$

$$\boxed{(x+3)^3 = (y+9)}$$

$$h = -3 \quad , \quad k = -9$$

$$[4P = 1] \div 4 \Rightarrow P = \frac{1}{4}$$

الرأس: $\bar{o}(h, k) \Rightarrow (-3,-9)$

البؤرة: $\bar{F}(h, P+k)$

$$\bar{F}\left(-3, \frac{1}{4}-9\right) \Rightarrow \bar{F}\left(-3, \frac{-35}{4}\right)$$

$$\bar{F}\left(-3, -8\frac{3}{4}\right)$$

معادلة الدليل: $y = -P + k$

$$y = -\frac{1}{4} - 9 \Rightarrow y = -9\frac{1}{4}$$

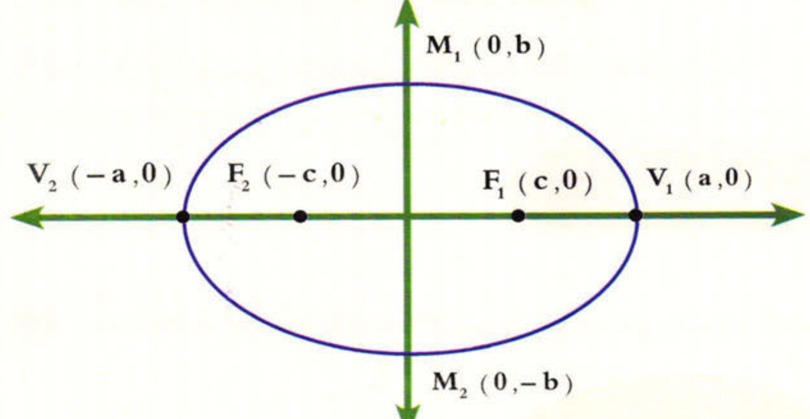
معادلة المحور: $\bar{x} = h$

$$\bar{x} = -3$$

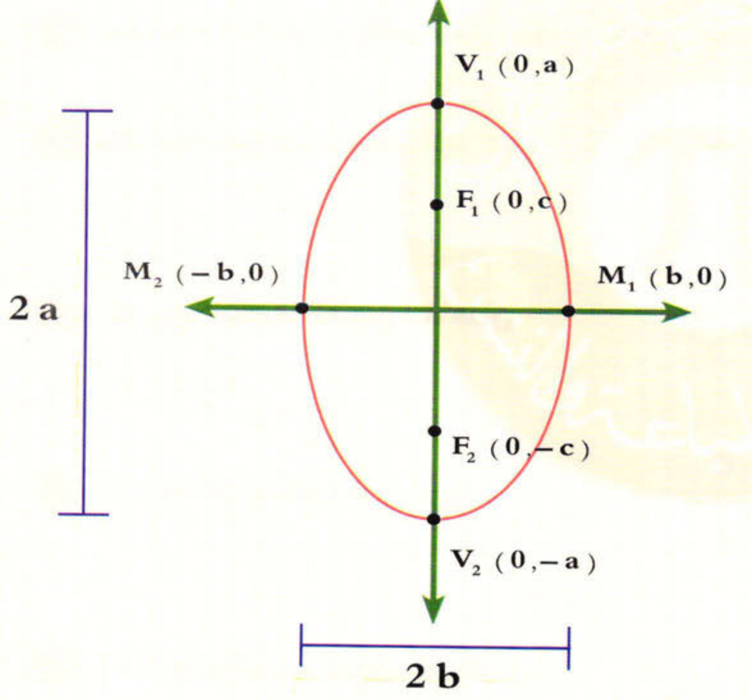
# القطع الناقص Ellipse

**تعريف:** هو مجموعة النقط على المستوي التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتين (البؤرتان) عدد ثابت .

**المصطلحات والرموز:**




((قطع ناقص بؤرتاه تنتميان لمحور السينات))




((قطع ناقص بؤرتاه تنتميان لمحور الصادات))

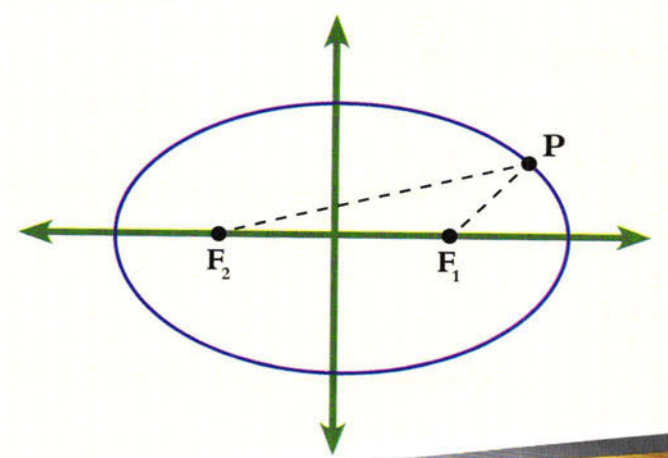
الرأسان ← $V_1\ ,\ V_2$

البؤرتان ← $F_1\ ,\ F_2$

القطبان ← $M_1\ ,\ M_2$




$PF_1 + PF_2$ / مجموع بعدي نقطة عن بؤرتيه



## بعض الرموز

2a = طول المحور الكبير ((البعد بين الرأسين)) . . . ((العدد الثابت))

2c = البعد بين البؤرتين ((البعد البؤري))

2b = طول المحور الصغير ((البعد بين القطبين))

## قوانين

1. معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور السينات $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

2. معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور الصادات $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

3. لايجاد مساحة القطع الناقص $A=a\ b\ \pi$

4. لايجاد محيط القطع الناقص $P=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

5. لايجاد الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}$ ، $e<1$ أصغر من (1)

6. القانون العام للقطع الناقص $a^2=b^2+c^2$

$b=\sqrt{a^2-c^2}$ ⟵

$c=\sqrt{a^2-b^2}$ ⟵

* معادلة المحور الكبير $x=0$
معادلة المحور الصغير $y=0$
إذا كان القطع بؤرتاه على محور الصادات .

* معادلة المحور الكبير $y=0$
معادلة المحور الصغير $x=0$
إذا كان القطع بؤرتاه على محور السينات .

# ملاحظات حول القطع الناقص

**أولاً:** عندما يعطي
- بؤرة يعني $c$
- رأس يعنـي $a$
- قطب يعني $b$

**ثانياً:** إذا اعطى :

1) طول المحور الكبير مثلاً (12) ← $2a = 12$ ونجد $a$
2) طول المحور الصغير مثلاً (16) ← $2b = 16$ ونجد $b$
3) المسافة بين البؤرتين ((البعد البؤري)) مثلاً (8) ← $2c = 8$ ونجد $c$

**ثالثاً:** كيف نحول الكلام الى صيغة رياضية ؟ ⟵ تابع بعض العبارات :

1) مجموع طولي محوريه ← $2a + 2b$
2) مجموع مربعي طولي محوريه ← $(2a)^2 + (2b)^2$
3) الفرق بين طولي محوريه ⟵ إذا كان الفرق (+) $2a - 2b$
   إذا كان الفرق (-) $2b - 2a$
4) النسبة :

النسبة بين طولي محوريه
- $\frac{2a}{2b}$ عندما النسبة أكبر من (1) أو $\frac{\text{رقم كبير}}{\text{رقم صغير}}$
- $\frac{2b}{2a}$ عندما النسبة أصغر من (1) أو $\frac{\text{رقم صغير}}{\text{رقم كبير}}$

**مثلاً :**

النسبة بين طول محوره الكبير الى البعد بين البؤرتين $\frac{2a}{2c}$

بسط (2a) مقام (2c)

**مثلاً :**

النسبة بين البعـــد بين بؤرتيـــه الى طول محوره الصغير $\frac{2c}{2b}$

بسط (2c) مقام (2b)

بعد كلمة إلى يصبح مقام دائماً

**إنتبه !** $a$ أكبر من $b$ أكبر من $c$ دائماً

$a > c \quad , \quad a > b$

**إنتبه !** الاختلاف المركزي $e$ أصغر من (1) إذا إعطى اختلاف أصغر من (1) ولم يذكر نوع القطع فهذا القطع ناقص .

**بعض المصطلحات الاضافية: كي تتعلم كيف تحول الكلام الى علاقة رياضية:**

* مجموع طول محوره الكبير ونصف طول محوره الصغير $2a + \frac{1}{2}(2b)$

طول محوره الكبير ← مجموع ← نصف طول محوره الصغير

* طول محوره الكبير يزيد على طول محوره الصغير بمقدار (4) $2a - 2b = 4$

* طول محوره الكبير ثلاثة امثال طول محوره الصغير $2a = 3(2b)$

محوره الكبير ← ثلاثة امثال ← محوره الصغير

إذا اعطى ((المساحة - المحيط - الاختلاف المركزي)) نستفاد من قوانين هذه المعطيات لإيجاد علاقة أو معادلة.

* حاول دائماً في حاله الربط بين القطع الناقص والمكافئ ان تجد (P) من معادلة القطع المكافئ لانها سوف تمثل a أو b أو c للناقص حسب السؤال.



## العلاقة بين القطعين المكافئ والناقص

جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ ... الخ .

| $c$ ناقص | $=$ | $P$ مكافئ |
|---|---|---|

جد معادلة القطع الناقص الذي احد راسيه هو بؤرة القطع المكافئ ... الخ .

| $a$ ناقص | $=$ | $P$ مكافئ |
|---|---|---|

جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه تنطبق على بؤرة القطع المكافئ ... الخ .

| $c$ ناقص | $=$ | $P$ مكافئ |
|---|---|---|

**ملاحظة هامة**

1. كل يمر $(x,0)$ , $(0,y)$ تعني اما (a) أو (b) شرط ان يكون اما $x=0$ أو $y=0$
   سوف يمثل اما (a) أو (b)
2. كل يمس سوف يمثل اما (a) أو (b)
   * جد معادلة القطع الناقص الذي يمس دليل القطع المكافئ ... الخ .
   يمس: اما a أو b
   $P$ ← سوف يمثل اما (a) أو (b)
3. كل يقطع عند رقم $x=\pm$ أو رقم $y=\pm$ هذا الرقم يمثل (a) أو (b) ويؤخذ موجب .
4. عندما يذكر عبارة نقطة التقاطع مع محور السينات أو الصادات :

(a) نقطة التقاطع مع محور السينات $y=0$

**مثال** جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه نقطة تقاطع المستقيم $2x-y=8$ مع محور السينات .

$$2x-y=8 \qquad \boxed{y=0}$$

$$[2x=8]\div 2 \Rightarrow \boxed{x=4}$$

نقطة $(4,0)$

**b** نقطة التقاطع مع محور الصادات $x = 0$

**مثال** جد معادلة القطع الناقص الذي احدى رأساه نقطتا تقاطع المنحني $x^2 + y^2 - 3x = 16$ مع محور الصادات .

$$x^2 + y^2 - 3x = 16 \quad , \quad x = 0$$

$$(0)^2 + y^2 - 3(0) = 16 \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow \boxed{y \pm 4}$$

$$\boxed{x = 0}$$

$$(0,4) \quad , \quad (0,-4)$$

**إستراحة شعرية :**

قمرٌ تَكامل في المحاسن وانتهى
فالشمس تشرق من شقائقِ خدهِ
ملكُ الجمالِ باسرهِ فكأنما
حُسنُ البرية كلها من عندهِ




صفحاتنا على الفيس بوك
/ iQRES
/ NTAAj.iQ

**الحالة الأولى:**

إذا اعطى معادلة القطع الناقص واطلب معلومات القطع من (بؤرتان - رأسان ... مساحة محيط ... الخ)).

**أولاً:** يجب ان نضع المعادلة بالشكل القياسي $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ سينات  $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ صادات

**ثانياً:** يجب ان يكون معامل $x^2$ ومعامل $y^2$ واحد

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

هنا لازم واحد

**ثالثاً:** إذا كان هناك ثابت (رقم) بعد اليساوي وكان عدد صحيح (ليس كسر) نقسم عليه المعادلة ⟵ تابع المثال التوضيحي $16x^2+9y^2=144$

$$\left[\frac{16x^2}{144}+\frac{9y^2}{144}=\frac{144}{144}\right]\div 144 \Rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$$

وإذا كان بعد اليساوي كسر نضرب المعادلة في مقلوب الكسر تابع المثال التالي:

$$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=\frac{2}{3}$$

⟵ وهو $\frac{3}{2}x$ نضرب

مقلوب الـ $\frac{2}{3}$

$$\frac{x^2}{12}\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{y^2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$$

**إنتبه!**

في حالة وجود عدد (معامل) $x^2$ أو $y^2$ يصبح مقام للمقام ⟵ مثلاً

$$\frac{3x^2}{5}+\frac{2y^2}{7}=1$$

ينزل تحت المقام

$$\frac{x^2}{\frac{5}{3}}+\frac{y^2}{\frac{7}{2}}=1$$






**مثال 1** جد طول كل من المحورين وإحداثي البؤرتين والرأسين والاختلاف المركزي ومساحة ومحيط القطع الناقص.

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

((المعادلة بالشكل القياسي))
لاتحتاج ترتيب

$a^2 = 25 \leftarrow 25$ العدد الاكبر هو

$b^2 = 16 \leftarrow 16$ العدد الاصغر هو

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$

$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$c = \sqrt{25-16} = \sqrt{9}$

$c = 3$

طول المحور الكبير $= 2a = 2(5) = 10$ وحدة

طول المحور الصغير $= 2b = 2(4) = 8$ وحدة

((البؤرتان))
$F_1\ (c,0) \rightarrow F_1\ (3,0)$
$F_2\ (-c,0) \rightarrow F_2\ (-3,0)$

((الرأسان))
$V_1\ (a,0) \rightarrow V_1\ (5,0)$
$V_2\ (-a,0) \rightarrow V_2\ (-5,0)$

((أصغر))

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} = 0.6 < 1$$

$A = a\,.\,b\pi \Rightarrow A = (5\times4)\,\pi = 20\,\pi$ وحدة مربعة

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{25+16}{2}}$$

$P = 2\pi\sqrt{\frac{41}{2}}$ وحدة

**مثال 2** عين كل من البؤرتين والرأسين والقطبين والمركز ثم جد طول ومعادلة كل من المحورين والاختلاف المركزي القطع

$$x^2 + 2y^2 = 1$$

$$\frac{x^2}{1}+\frac{2y^2}{1}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1$$

((سينات)) الأكبر $a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$

الأصغر $b^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$a^{2} = b\ + c \Rightarrow c = \sqrt{a\ - b}$

$c = \sqrt{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

$\therefore c = \frac{1}{\sqrt{2}}$

((البؤرتان))
$F_1\ (c,0) \rightarrow F_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$
$F_2\ (-c,0) \rightarrow F_2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},0\right)$

---

((الرأسان))
$V_1\ (a,0) \rightarrow V_1\ (1,0)$
$V_2\ (-a,0) \rightarrow V_2\ (-1,0)$

---

((القطبان))
$M_1\ (0,b) \rightarrow M_1\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
$M_2\ (0,-b) \rightarrow M_2\left(0,\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

---

طول المحور الكبير $= 2a = 2(1) = 2$ وحدة

طول المحور الصغير $= 2b = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$ وحدة

---

معادلة المحور الكبير $\leftarrow y = 0$

معادلة المحور الصغير $\leftarrow x = 0$

---

((أصغر))

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

* المركز $O\ (0,0)$ نقطة الأصل

**مثال 3** عين البؤرتان والرأسان والقطبان والمركز ثم جد طول ومعادلة المحورين والاختلاف المركزي للقطع $9x^2+13y^2=117$

((ملاحظة ثالثاً)) $9x^2+13y^2=117 \rightarrow \div 117$

$$\frac{9x^2}{117}+\frac{13y^2}{117}=\frac{117}{117} \Rightarrow \frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{9}=1$$

(سينات) $a^2=13 \Rightarrow 9=\sqrt{13}$

$b^2=a \Rightarrow b=3$

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{13-9}$

$c=\sqrt{4} \Rightarrow c=2$

البؤرتان
$F_1(c,0) \rightarrow F_1(2,0)$
$F_2(-c,0) \rightarrow F_2(-2,0)$

الرأسان
$V_1(a,0) \rightarrow V_1(\sqrt{13},0)$
$V_2(-a,0) \rightarrow V_2(-\sqrt{13},0)$

((القطبان))
$M_1(0,b) \rightarrow M_1(0,3)$
$M_2(0,-b) \rightarrow M_2(0,-3)$

طول المحور الكبير $=2a=2(\sqrt{13})=2\sqrt{13}$ وحدة

طول المحور الصغير $=2b=2(3)=6$ وحدة

معادلة المحور الكبير $y=0$

معادلة المحور الصغير $x=0$

* المركز $(0,0)$ O نقطة الأصل

الأختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{13}}$

**مثال 4** ناقش القطع الناقص $4x^2+3y^2=\frac{4}{3}$

$$\not{4}x^2\left(\frac{3}{\not{4}}\right)+3y^2\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\frac{3x^2}{1}+\frac{9y^2}{4}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{3}}+\frac{y^2}{\frac{4}{9}}=1$$

(صادات) الأكبر $\frac{4}{9} \rightarrow a^2=\frac{4}{9} \Rightarrow a=\frac{2}{3}$

الأصغر $\frac{1}{3} \rightarrow b^2=\frac{1}{3} \Rightarrow b=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{\frac{4}{9}-\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{4-3}{9}}$

$c=\sqrt{\frac{1}{9}} \Rightarrow c=\frac{1}{3}$

البؤرتان
$F_1(0,c) \rightarrow F_1\left(0,\frac{1}{3}\right)$
$F_2(0,-c) \rightarrow F_2\left(0,\frac{-1}{3}\right)$

الرأسان
$V_1(0,a) \quad V_1\left(0,\frac{2}{3}\right)$
$V_2(0,-a) \quad V_2\left(0,-\frac{2}{3}\right)$

((القطبان))
$M_1(0,b) \quad B_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$
$M_2(0,-b) \quad B_2\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},0\right)$

طول المحور الكبير $=2a=2\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}$ وحدة

طول المحور الصغير $=2b=2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}$ وحدة

معادلة المحور الكبير $\Leftarrow x=0$

معادلة المحور الصغير $\Leftarrow y=0$

$$A=a.b\pi=\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\pi=\frac{2}{3\sqrt{3}}\pi$$ وحدة مربعة

$$P=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=2\pi\sqrt{\frac{\frac{4}{9}+\frac{1}{3}}{2}}=2\pi\sqrt{\frac{7}{18}}\pi$$ وحدة

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{\not{3}}\times\frac{\not{3}}{2}=\frac{1}{2}$$

موقع طلاب العراق
WWW.iQ-RES.COM

**أولاً: الأسئلة الاساسية:** وهي الأسئلة التي يعطي فيها البؤرة أو الرأس أو القطب مباشرة أو يعطي طول المحور الصغير أو البعد بين البؤرتين ... الخ .

**مثال 1** جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_2(-3,0)$ , $F_1(3,0)$ ورأساه النقطتان $V_2(-5,0)$ , $V_1(5,0)$

(السينات) $c=3 \rightarrow (c)$ (البؤرة)

(السينات) $a=5 \rightarrow (a)$ (الرأس)

نجد b من القانون العام

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow b=\sqrt{a^2-c^2}$$

$$b=\sqrt{(5)^2-(3)^3}$$

$$b=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}$$

$$b=4$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

**مثال 2** جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $(5,0)$ , $(-5,0)$ وطول محوره الكبير = 12 وحدة .

(السينات) $c=5 \rightarrow (c)$ (البؤرة)

$$[2a=12]\div 2 \Rightarrow a=6$$

نجد b من القانون العام

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow b=\sqrt{a^2-c^2}$$

$$b=\sqrt{(6)^2-(5)^3}$$

$$b=\sqrt{36-25}$$

$$b=\sqrt{11} \Rightarrow b^2=11$$

القطع على محور السينات لأن البؤرة على محو السينات .

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{11}=1}$$

**مثال 3** جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل والمسافة بين البؤرتين (8) وحدات ونصف طول محوره الصغير يساوي (3) وحدات .

المسافة بين البؤرتين $=2c$

$$[2c=8]\div 2$$

$$c=4$$

$$\frac{1}{2}(2b)=3 \Rightarrow b=3$$

($\frac{1}{2}$ ← نصف ، $2b$ ← محوره الصغير)

نجد a من القانون العام

$$a^2=b^2+c^2$$

$$a^2=3^2+4^2$$

$$a^2=9+16 \Rightarrow a^2=25 \Rightarrow a=5$$

لم يحدد موقع البؤرة

السينات:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

أو

الصادات:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$$

**مثال 4** جد المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه $(0, \mp 2)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x = \mp 4$

البؤرة $(c) \rightarrow c = 2$ (الصادات)

**ملاحظة** $x = 4$ تُعتبر $(b)$ قطب لأن البؤرة على محور الصادات والذي يعاكس البؤرة هو القطب لذلك $(b = 4)$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = (4)^2 + (2)^2 \Rightarrow a^2 = 16 + 4 \Rightarrow a^2 = 20$$

معادلة الصادات $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{20} = 1$






WWW.iQ-RES.COM
موقع طلاب العراق

**مثال 5** جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل والاختلاف المركزي $\left(\frac{1}{2}\right)$ وطول محوره الصغير (12) وحدة .

طول محوره الصغير $(2b) \Rightarrow [2b = 12] \div 2$

$b = 6$

$$e = \frac{c}{a}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{c}{a} \Rightarrow a = 2c \quad .......(1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$(2c)^2 = (6)^2 + c^2 \Rightarrow 4c^2 = 36 + c^2$$

$$4c^2 - c^2 = 36$$

$$[3c^2 = 36] \div 3$$

$$c^2 = 12 \Rightarrow c = 2\sqrt{3}$$

$$a = 2c \Rightarrow a = 2(2\sqrt{3})$$

$$a = 4\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 48$$

لم يتم تحديد موقع البؤرة ولها احتمالين :

أولاً : على محور السينات $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{36} = 1$$

ثانياً : على محور الصادات $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{48} = 1$$

**مثال 6** جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 12x = 0$ وطول محوره الصغير يساوي (10) وحدات .

طول محوره الصغير $= 2b \Rightarrow [2b = 10] \div 2$

$b = 5$

القطع المكافئ : دائماً نجد P من معادلة القطع المكافئ .

$$y^2 - 12x = 0 \Rightarrow y^2 = 12x$$

$$y^2 = 4Px$$

$$[4P = 12] \div 4 \Rightarrow P = 3$$

$$F(3, 0)$$

| إحدى بؤرتيه | هي | بؤرة القطع المكافئ |
|---|---|---|
| $c_{\text{ناقص}}$ | $=$ | $P_{\text{مكافئ}}$ |

$a = ?$ , $b = 5$ , $c = 3$

من القانون العام نجد a

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = (5)^2 + (3)^2$$

$$a^2 = 25 + 9 \Rightarrow a^2 = 34$$

بؤرتا القطع الناقص على محور السينات لأن بؤرة القطع المكافئ على السينات .

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{25} = 1$$

**مثال 7** جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $(x^2 = 24y)$ ومجموع طولي محوريه (36) وحدة.

* نستفد من معادلة المكافئ لنجد P

$x^2 = 24y$

$x^2 = 4Py \Rightarrow [4P = 24] \div 4$

$P = 6 \Rightarrow F(0,6)$

إحدى بؤرتيه = هي = بؤرة القطع المكافئ

$c_{\text{ناقص}} = P_{\text{مكافئ}} \Rightarrow c = 6$

مجموع طولي محوريه ← $[2a + 2b = 36] \div 2$

$a + b = 18 \Rightarrow b = 18 - a \ldots\ldots\ldots(1)$

$a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 = (18 - a)^2 + (6)^2$

مربع حدانية

$a^2 = 324 - 36a + a^2 + 36 \Rightarrow [36a = 360] \div 36$

$a = 10$

نعوض a في المعادلة (1)

$b = 18 - a$

$b = 18 - 10 \Rightarrow b = 8$

بؤرة الناقص على محور الصادات لذلك القطع على محور الصادات.

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$$

**مثال 8** جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه نقطتا تقاطع المنحني $x^2 + y^2 - 3x = 16$ مع محور الصادات ويمس دليل القطع المكافئ $(y^2 = 12x)$.

نقطة التقاطع مع محور الصادات $x = 0$

$x^2 + y^2 - 3x = 16$

بالجذر $(0)^2 + y^2 - 3(0) = 16 \Rightarrow y^2 = 16$

$y = \mp 4$

$F_1(0,4) \quad F_2(0,-4) \rightarrow c = 4$ (صادات)

استفد من معادلة القطع المكافئ لنجد P

$y^2 = 12x$

$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 12] \div 4$

$P = 3$ (سينات)

كلمة يمس يعني أما a أو b

وهنا $\left(P_{\text{مكافئ}} = b_{\text{ناقص}}\right)$ لأن البؤرة صادات والمكافئ سينات والذي يخالف البؤرة هو (b)

$b = 3$

نجد a من القانون العام

$a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 = 3^2 + 4^2$

$a^2 = 9 + 16 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

**مثال 9** جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور السينات والمسافة بينهما (6) وحدات والفرق بين طولي محوريه (2).

$[2c = 6] \div \Rightarrow c = 3$

$[2a - 2b = 2] \div 2 \Rightarrow a - b = 1$

$a = 1 + b \ldots\ldots (1)$

$a^2 = b^2 + c^2$

$(1+b)^2 = b^2 + 3^2$

$1 + 2b + b^2 = b^2 + 9 \Rightarrow 2b = 9 - 1$

$[2b = 8] \div 2$

$b = 4$ ((تعوض في معادلة رقم (1))

$a = 1 + b$

$a = 1 + 4 \Rightarrow a = 5$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

**مثال 10** جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الأصل وطول محوره الكبير ضعف طول محوره الصغير ويقطع القطع المكافئ ($y^2 + 8x = 0$) عند النقطة التي احداثيها السيني (2−).

$[2a = 2(2b)] \div 2$

ضعف محوره الصغير = محوره الكبير

$a = 2b \ldots\ldots (1)$

يقطع القطع عند النقطة $x = -2$ نعوضه قيمة x في معادلة القطع المكافئ

بالجذر $y^2 + 8(-2) = 0 \Rightarrow y^2 = 16$

$y = \pm 4$

$(-2, 4) \quad , \quad (-2, -4)$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

نعوض إحدى النقطتين ولتكن $(-2, 4)$

$$\frac{(-2)^2}{a^2} + \frac{(4)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{4}{(2b)^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

ونعوض أيضاً $a = 2b$

$$\frac{4}{4b^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{17}{b^2} = \frac{1}{1}$$

$b^2 = 17 \Rightarrow b = \sqrt{17}$

$a = 2b \Rightarrow a = 2\sqrt{17} \Rightarrow a^2 = 68$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{68} + \frac{y^2}{17}$$

موقع طلاب العراق
WWW.iQ-RES.COM

**ملاحظة ومثال** إذا أعطى في السؤال نقطة $(x, y)$ شرط لا تحوي احداثي صفر

نستفيد من معادلة القطع القياسية $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ أو $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

لنعوض النقطة $(x, y)$ ونكون معادلة.

**مثال 11** جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2+8x=0$ علماً ان القطع الناقص يمر بالنقطة $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

* نستفد من معادلة المكافئ لنجد P

$y^2=-8x$

$y^2=-4Px \Rightarrow [4P=8]\div 4 \Rightarrow P=2$

$F(-2,0)$

| إحدى بؤرتيه | هي | بؤرة القطع المكافئ |
|---|---|---|
| $c$ ناقص | = | $P$ مكافئ |

$c=2$

أنظر الى النقطة $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ نستفيد من معادلة القطع الناقص القياسية.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{(2\sqrt{3})^2}{a^2}+\frac{(\sqrt{3})^2}{b^2}=1$

$\left[\frac{12}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1\right].a^2 \,.\, b^2$

$12b^2+3a^2=a^2 \,.\, b^2 \quad .......(1)$

$a^2=b^2+c^2$

$a^2=b^2+2^2 \Rightarrow a^2=b^2+4 \quad .......(2)$

بتعويض معادلة (2) في معادلة (1)

$12b^2+3\underbrace{(b^2+4)}_{a^2}=\underbrace{(b^2+4)}_{a^2}.b^2$

$\underbrace{12b^2+3b^2}_{\text{جمع}}+12=b^4+4b^2$

$15b^2+12=b^4+4b^2$

$0=b^4+\underbrace{4b^2-15b^2}_{\text{طرح}}-12$

$b^4-11b^2-12=0$

$(b^2+1)(b^2-12)=0$

أما $b^2+1=0$ يُهمل $\notin R$

أو $b^2-12=0 \Rightarrow b^2=12$

نعوض في معادلة (2)

$a^2=b^2+4 \quad .......(2)$

$a^2=12+4 \Rightarrow a^2=16$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

**ملاحظة ومثال** إذا طلب في السؤال معادلة القطع الناقص وأعطى نقطتين $P_1(x,y)$ $P_2(x,y)$ نستفيد مباشرة من المعادلة القياسية .

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ أو $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ حسب موقع البؤرة ونعوض النقطتين مرتين .

**مثال 12** جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور السينات ويمر بالنقطتين $(3,4)$ , $(6,2)$ .

(البؤرة على محور السينات)

$(3,4)$
$(x,y)$

$$\frac{(3)^2}{a^2}+\frac{(4)^2}{b^2}=1$$

$$\left[\frac{9}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1\right].a^2\ .b^2$$

$$9b^2+16a^2=a^2b^2 \quad .......(1)$$

ونعوض $(6,2)$ $(x,y)$

$$\frac{(6)^2}{a^2}+\frac{(2)^2}{b^2}=1$$

$$\left[\frac{36}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1\right].a^2\ .b^2$$

$$36b^2+4a^2=a^2\ .b^2 \quad .......(2)$$

نضرب المعادلة (1) في 4 لنساوي معامل $b^2$ ونحل بالحذف (الطرح)

$$36b^2+64a^2=4a^2b^2 \quad .......(3)$$

نجد (2) أو (3)

$$36b^2+64a^2=4a^2b^2$$

$$\pm 36b^2 \pm 4a^2=\pm a^2b^2$$

$$\left[60a^2=3a^2b^2\right]\div a^2 \qquad a^2\neq 0$$

$$\left[60=3b^2\right]\div 3 \Rightarrow b^2=20$$

نعوض في معادلة (1)

$$9b^2+16a^2=a^2b^2$$

$$9(20)+16a^2=a^2(20)$$

$$180+16a^2=20a^2$$

$$180=20a^2-16a^2 \Rightarrow \left[180=4a^2\right]\div 4$$

$$a^2=45$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$$


تابعونا على التليكرام
@iQRES


**ملاحظة ومثال** إذا أعطى المحيط بين النقاط $QF_1F_2$ أي المحيط للمثلث المتكون من البؤرتين $F_1, F_2$ ونقطة ثالثة على القطع يكون الحل كما يلي:

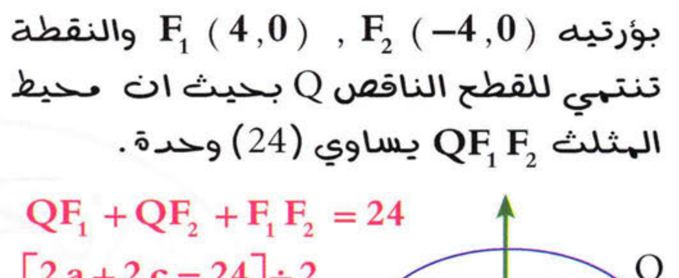
$$\text{محيط المثلث } QF_1F_2 = \underbrace{QF_1 + F_2}_{2a} + \underbrace{F_1F_2}_{2c} \Rightarrow 2a + 2c = (\text{المحيط})$$

ونكّون معادلة رقم (1) ونكمل الحل ⟵ تابع المثال التالي:

**مثال 13** جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه $F_1(4,0)$ , $F_2(-4,0)$ والنقطة تنتمي للقطع الناقص Q بحيث ان محيط المثلث $QF_1F_2$ يساوي (24) وحدة.

$QF_1 + QF_2 + F_1F_2 = 24$

$[2a + 2c = 24] \div 2$




$a + c = 12$

$a + 4 = 12 \Rightarrow a = 8$

نجد b من القانون العام

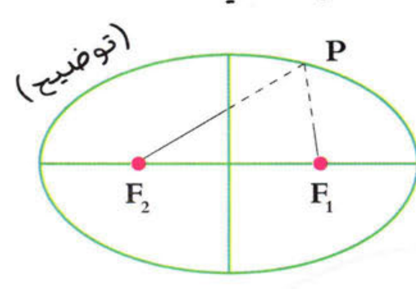
$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$

$b = \sqrt{64 - 16}$

$b = \sqrt{48} \Rightarrow b^2 = \sqrt{48}$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1}$

**مثال 14** قطع ناقص فيه النقطة P تنتمي للقطع بحيث ان محيط المثلث $PF_1F_2$ يساوي (16) وحدة جد معادلة القطع الناقص إذا علمت أن طول محوره الصغير يساوي البعد بين بؤرته ودليل القطع المكافئ $y^2 = 16x$ علمت ان القطع على محور السينات (إضافي).




$PF_1 + PF_2 + F_1F_2 = 16$

$[2a + 2c = 16] \div 2$

$a + c = 8 \Rightarrow c = 8 - a \quad ........(1)$

$y^2 = 16x$

$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 16] \div 4 \Rightarrow P = 4$

$2b = 2P$

طول المحور الصغير ← $2b$ ، $2P$ → البعد بين بؤرة ودليل القطع المكافئ

$b = P \Rightarrow b = 4$ للناقص

$a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 = (4)^2 + (8 - a)^2$

$\cancel{a^2} = 16 + 64 - 16a + \cancel{a^2}$

$[16a = 80] \div 16 \Rightarrow a = 5$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

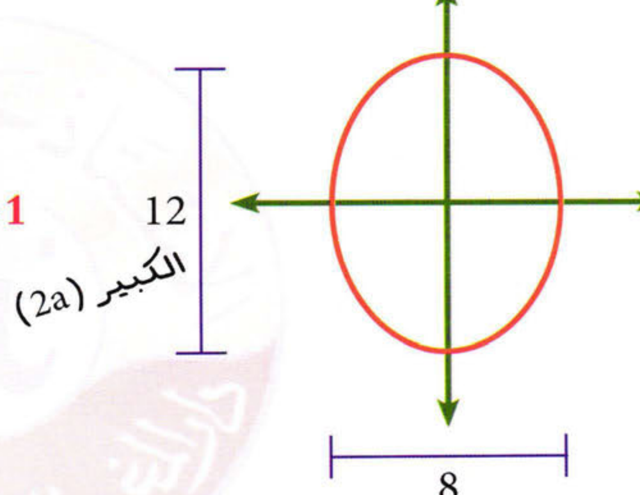
**ملاحظة ومثال** إذا قال في السؤال ان القطع الناقص يقطع من محور (جزءاً) طوله (   ) فأن هذا الجزء المقطوع أما $2a$ أو $2b$ تابع المثال التالي:

$2a \leftarrow$ الجزء الأكبر
$2b \leftarrow$ الجزء الأصغر
والقطع يقع على المحور الأكبر

**مثال 15** جد معادلة القطع الناقص الذي يقطع من محور السينات جزءاً طوله (8) وحدات ومن محور الصادات جزءاً طوله (12) وحدة . ثم جد المسافة بين البؤرتين والمساحة والمحيط .

$2b = 8$ الأصغر $b = 4$

$2a = 12$ الأكبر $a = 6$ (صادات)




$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$c=\sqrt{a^2-b^2}$$

$$c=\sqrt{36-16}=\sqrt{20}=\sqrt{5\times 4} \Rightarrow c=2\sqrt{5}$$

---

المسافة بين البؤرتين $2\times 2\sqrt{5} = 2c$

$= 4\sqrt{5}$ وحدة طول

---

$$A = a\,.\,b\pi$$

$$A=(6)(4)\pi \Rightarrow A = 24\pi \text{ unit}^2$$

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

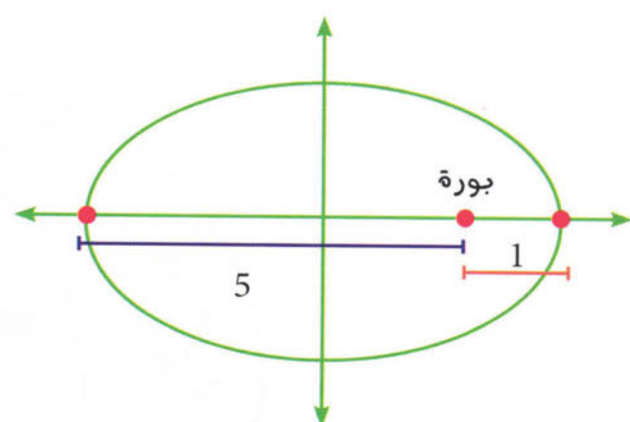
$$P = 2\pi\sqrt{\frac{36+16}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{52}{2}} = 2\pi\sqrt{26} \text{ unit}$$

**ملاحظة ومثال** عندما يعطي في السؤال بعدي احدى البؤرتين عن الرأسين بشكل عددين فأن الحل يكون :

من القانون العام نجد $(b)$
ثم معادلة القطع الناقص

مجمـوع البعديـن $= 2a$
حاصل طرح البعدين $= 2c$

**مثال 16** جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه تبعد عن نهايتي محوره الكبير بالعددين $1,5$ على الترتيب .




((الرسم افتراضي))
من الممكن رسمه على محور الصادات

مجموع البعدين

$$2a = 5+1 \Rightarrow [2a = 6] \div 2$$

$$a = 3$$

حاصل طرح البعدين

$$2c = 5-1 \Rightarrow [2c = 4] \div 2$$

$$c = 2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$b = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5} \Rightarrow b^2 = 5$$

لم يحدد موقع البؤرة لذلك ناخذ احتمالين

السينات $\quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$

الصادات $\quad \dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

**ملاحظة** ربما يتسائل الطالب الملاحظة تقول ((إذا أعطى بعدي إحدى البؤرتين عن الرأسين)) والسؤال أعطى بعد إحدى البؤرتين عن نهايتي محوره الكبير!

لذلك :
((نفس المعنى كلا التعبيرين))

**ملاحظة ومثال**

إذا أعطى ي السؤال معادلة قطع تحتوي على ثابت مجهول $h,k \in R$ مثلاً :

**أولاً :** إذا كانت المعادلة تحتوي مجهول واحد فقط نستفاد من معادلة القطع لنجد $a^2$ او $b^2$
ونستخدم القانون العام $a^2 = b^2 + c^2$ ← تابع الأمثلة الآتية :

**مثال 17** لتكن $kx^2 + 4y^2 = 36$ معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه $(\sqrt{3}, 0)$ جد قيمة $k \in R$ .

$$\left[kx^2 + 4y^2 = 36\right] \div 36$$

$$\frac{kx^2}{36} + \frac{4y^2}{36} = \frac{36}{36} \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{36}{k}} + \frac{y^2}{9} = 1$$

لأن البؤرة على محور السينات

إذن $\frac{36}{k} = a^2$ ← , $b^2 = 9$ , $c = \sqrt{3}$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\frac{36}{k} = 9 + (\sqrt{3})^2$$

$$\frac{36}{k} = 9 + 3 \Rightarrow \frac{36}{k} = 12 \Rightarrow k = \frac{36}{12} \Rightarrow \boxed{k = 3}$$

**مثال 18** قطع ناقص معادلته $4x^2 + hy^2 - h = 0$ إحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 = 4\sqrt{3}x$ جد قيمة $h \in R$ ((سؤال إضافي)).

من معادلة القطع المكافئ نجد P

$$y^2 = 4\sqrt{3}x$$

$$y^2 = 4Px \Rightarrow \left[4P = 4\sqrt{3}\right] \div 4 \Rightarrow P = \sqrt{3}$$

$$F(\sqrt{3}, 0)$$

$\therefore c = \sqrt{3}$ ((للناقص))

$$\left[4x^2 + hy^2 = h\right] \div h$$

$$\frac{x^2}{\frac{h}{4}} + \frac{y^2}{1} = 1$$

القطع على محور السينات من بؤرة القطع المكافئ $(\sqrt{3}, 0)$ لذلك

$$\frac{h}{4} = a^2 \quad , \quad 1 = b^2 \quad , \quad c = \sqrt{3}$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\frac{h}{4} = 1 + (\sqrt{3})^2$$

$$\frac{h}{4} = 1 + 3 \Rightarrow \frac{h}{4} = \frac{4}{1}$$

$$\boxed{h = 16}$$




زوروا موقعنا للمزيد
WWW.iQ-RES.COM

**ثانياً:** إذا كانت المعادلة تحتوي مجهولين فلا نستفيد منها بشيء فقط نجعلها بالشكل القياسي بعد اتمام السؤال وبالمقارنة مع المعادلة التي سوف نستخرجها نجد المجاهيل ⟵ تابع المثال التالي :

**مثال 19**

قطع ناقص معادلته $hx^2 + ky^2 = 36$ مركزه نقطة الأصل ومجموع مربعي طولي محوريه يساوي (60) وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 4\sqrt{3}x$ جد قيمة $h, k \in R$ .

لأن معادلة القطع الناقص تحتوي مجهولين لا نستفاد منها لذلك من معلومات السؤال نجد معادلة القطع الناقص.

$$y^2 = 4\sqrt{3}x$$

$$y^2 = 4Px \Rightarrow \left[4P = 4\sqrt{3}\right] \div 4 \Rightarrow P = \sqrt{3}$$

$$F(\sqrt{3}, 0)$$

$$\underset{\text{مكافئ}}{P} = \underset{\text{ناقص}}{c} \Rightarrow c = \sqrt{3}$$

$$(2a)^2 + (2b)^2 = 60$$

(مربعي ، مجموع ، طولي محوريه)

$$\left[4a^2 + 4b^2 = 60\right] \div 4$$

$$a^2 + b^2 = 15 \Rightarrow \boxed{a^2 = 15 - b^2} \ldots\ldots(1)$$

تعويض

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$15 - b^2 = b^2 + (\sqrt{3})^2$$

$$15 - b^2 = b^2 + 3$$

$$15 - 3 = b^2 + b^2 \Rightarrow \left[12 = 2b^2\right] \div 2$$

$$b^2 = 6$$ نعوض في معادلة (1)

$$a^2 = 15 - b^2$$

$$a^2 = 15 - 6 \Rightarrow a^2 = 9$$

الأن نجد معادلة القطع الناقص

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1$$

بعد ذلك نجعل معادلة المجاهيل بالشكل القياسي ثم نقارنها

$$\left[\frac{hx^2}{36} + \frac{ky^2}{36} = \frac{36}{36}\right] \div 36$$

$$\frac{x^2}{\frac{36}{h}} + \frac{y^2}{\frac{36}{k}} = 1 \xrightarrow{\text{بالمقارنة}} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1$$

$$\frac{36}{h} = 9 \Rightarrow h = \frac{36}{9} \Rightarrow \boxed{h = 4}$$

$$\frac{36}{k} = 6 \Rightarrow k = \frac{36}{6} \Rightarrow \boxed{k = 6}$$

مثال 20 باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص اذا علم :

a- بؤرتاه النقطتان $(0, \pm 2)$ ورأساه $(0, \pm 3)$ ومركزه نقطة الأصل .

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

القانون $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 2a$

التعويض $\sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x+0)^2 + (y+2)^2} = 6$

التحويل (تحويل الجذر للطرف الاخر)

وبتربيع الطرفين $\sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 4} = 6 - \sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4}$

فتح التربيع داخل الجذر اعلاه ، فتح التربيع داخل الجذر اعلاه

$$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 4y + \cancel{4} = 36 - 12\sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4} + \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 4y + \cancel{4}$$

$$\left[12\sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4} = 36 + 8y\right] \div 4$$

وبتربيع الطرفين $3\sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4} = 9 + 2y$

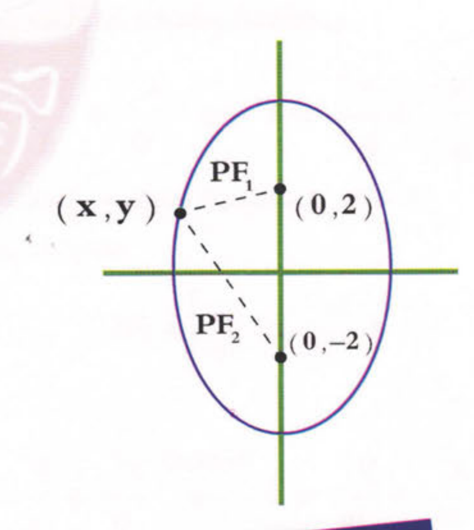
$$9(x^2 + y^2 + 4y + 4) = 81 + 36y + 4y^2$$

$$9x^2 + 9y^2 + \cancel{36y} + 36 = 81 + \cancel{36y} + 4y^2$$

$$9x^2 + 9y^2 - 4y^2 = 81 - 36$$

$$\left[9x^2 + 5y^2 = 45\right] \div 45$$

معادلة القطع الناقص $\boxed{\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1}$




**توضيح**

$a = 3 \Rightarrow 2a = 6$

$P(x, y)$ ($x_2$, $y_2$) $\xrightarrow{PF_1} F_1(0, 2)$ ($x_1$, $y_1$)

$P(x, y) \xrightarrow{PF_2} F_2(0, -2)$ ($x_1$, $y_1$)


تابعونا على التليكرام
@iQRES

b- باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص اذا علمت ان المسافة بين بؤرتيه 6 وحدات والعدد الثابت =10 والبؤرتان تقعان على محور السينات .:

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

القانون $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 2a$

التعويض $\sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+3)^2 + (y-0)^2} = 10$

التحويل (تحويل الجذر للطرف الاخر)

وبتربيع الطرفين $\sqrt{x^2 - 6x + 9 + y^2} = 10 - \sqrt{x^2 + 6x + 9 + y^2}$

فتح التربيع داخل الجذر اعلاه — فتح التربيع داخل الجذر اعلاه

$$\cancel{x^2} - 6x + \cancel{9} + \cancel{y^2} = 100 - 20\sqrt{x^2 + 6x + 9 + y^2} + \cancel{x^2} + 6x + \cancel{9} + \cancel{y^2}$$

وبتربيع الطرفين $\left[20\sqrt{x^2 + 6x + 9 + y^2} = 100 + 12x\right] \div 4$

$$5\sqrt{x^2 + 6x + 9 + y^2} = 25 + 3x$$

$$25(x^2 + 6x + 9 + y^2) = 625 + 150x + 9x^2$$

$$25x^2 + \cancel{150x} + 225 + 25y^2 = 625 + \cancel{150x} + 9x^2$$

$$25x^2 + 25y^2 - 9x^2 = 625 - 225$$

$$\left[16x^2 + 25y^2 = 400\right] \div 400$$

معادلة القطع الناقص $\boxed{\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1}$

**توضيح**

$$2c = 6 \Rightarrow c = 3$$

العدد الثابت $\boxed{2a = 10}$

$P(x, y)$ ($x_2$, $y_2$) $\rightarrow F_1\ (3, 0)$ ($x_1$, $y_1$)

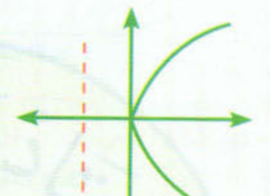
$P(x, y) \rightarrow F_2\ (-3, 0)$ ($x_1$, $y_1$)

## الاسئلة الوزارية الخاصة بالقطع الناقص والربط بين القطعين المكافئ والناقص

**سؤال 1** النقطة $\left(\frac{1}{3},2\right)$ تنتمي الى القطع المكافئ الذي راسه نقطة الاصل وبؤرته تنتمي الى محور السينات والتي هي احدى بؤرتي القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل والنسبة بين طولي محوريه $\left(\frac{5}{4}\right)$ جد معادلة القطعين المكافئ والناقص.

1995 - د (2)

القطع المكافئ:



الفتحة نحو اليمين لأن النقطة في الربع الأول والبؤرة على محور السينات.

$$y^2 = 4Px$$

$$(2)^2 = 4P\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow 4 = \frac{4P}{3} \Rightarrow P = 3$$

$$y^2 = 4(3)x \Rightarrow \boxed{y^2 = 12x}$$

القطع الناقص:

$$\underset{\text{مكافئ}}{P} = \underset{\text{ناقص}}{C}$$

$$\frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}b} = \frac{5}{4} \Rightarrow [4a = 5b] \div 4$$

$$a = \frac{5}{4}b \ldots\ldots(1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\left(\frac{5}{4}b\right)^2 = b^2 + (3)^3$$

$$\left[\frac{25}{16}b^2 = b^2 + 9\right] \cdot 16$$

$$25b^2 = 16b^2 + 144$$

$$25b^2 - 16b^2 = 144$$

$$[9b^2 = 144] \div 9 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$$

$a = \frac{5}{4}b$ نعوض في معادلة (1)

$$a = \frac{5}{\cancel{4}}(\cancel{4}) \Rightarrow a = 5$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1}$$

**سؤال 2** جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور السينات والمسافة بين بؤرتيه تساوي (8) وحدات ومجموع طولي محوريه يساوي (16) وحدة.

2002 - د (1)

$[2c = 8] \div 2 \Rightarrow c = 4$ ((سينات))

$$[2a + 2b = 16] \div 2 \Rightarrow a + b = 8$$

$$a = 8 - b \ldots\ldots(1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$(8 - b)^2 = b^2 + (4)^2$$

$$64 - 16b + \cancel{b^2} = \cancel{b^2} + 16$$

$$16b = 64 - 16$$

$[16b = 48] \div 16 \Rightarrow b = 3$

$a = 8 - b \Rightarrow a = 8 - 3$

$a = 5$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

**سؤال 3** قطع ناقص معادلته $x^2 + 4y^2 = 4$ جد طول محوريه واحداثي راسيه وبؤريته.

2003 - د (1)

$[x^2 + 4y^2 = 4] \div 4 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$

$b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$c = \sqrt{4-1} \Rightarrow c = \sqrt{3}$

طول المحور الكبير $(2a) = 2 \times 2 = 4$ وحدة

طول المحور الصغير $(2b) = 2 \times 1 = 2$ وحدة

الراسان $V_1(a, 0)\ ,\ V_2(-a, 0)$

$V_1(2, 0)\ ,\ V_2(-2, 0)$

البؤرتان $F_1(c, 0)\ ,\ F_2(-c, 0)$

$F_1(\sqrt{3}, 0)\ ,\ F_2(-\sqrt{3}, 0)$

**سؤال 4** جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2 = 24y$ والفرق بين طولي محوريه ليساوي (4) وحدات.



2004 - د (1)

2015 - د (2) خارج القطر

نستفيد من معادلة القطع المكافئ لنجد P

$x^2 = 24y$

$x^2 = 4Py \Rightarrow [4P = 24] \div 4$

$P = 6 \Rightarrow F(0, 6)$

بؤرة المكافئ إحدى بؤرتي الناقص اي ان على محور الصادات $c = 6$

الفرق بين طولي محوريه $2a - 2b = 4$

$a - b = 2 \Rightarrow a = 2 + b$ .........(1)

$a^2 = b^2 + c^2$

$(2+b)^2 = b^2 + (6)^2$

$4 + 4b + \cancel{b^2} = \cancel{b^2} + 36$

$4b = 36 - 4 \Rightarrow [4b = 32] \div 4$

$b = 8$ تعويض

$a = 2 + b$

$a = 2 + 8 \Rightarrow a = 10$

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$

**سؤال 5** جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور السينات والمسافة بين بؤرتيه تساوي (12) وحدة والفرق بين طولي محوريه يساوي (4) وحدات طول.

2006 تمهيدي

$[2c = 12] \div 2 \Rightarrow c = 6$

$[2a - 2b = 4] \div 2$

$a - b = 2 \Rightarrow a = 2 + b$ .........(1)

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$(2+b)^2 = b^2 + (6)^2$$

$$4 + 4b + \cancel{b^2} = \cancel{b^2} + 36$$

$$4b = 36 - 4 \Rightarrow [4b = 32] \div 4$$

$$b = 8$$

تعويض

$$a = 2 + b$$

$$a = 2 + 8 \Rightarrow a = 10$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1}$$

---

**سؤال 6** لتكن $y^2 + 12x = 0$ , $y^2 - 12x = 0$ معادلتي قطعين مكافئين جد بؤرة كل منهما ومعادلة دليله ثم جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطعين المكافئين وطول محوره الصغير يساوي (10) وحدات طول.

2005 - د (2)

القطع المكافئ:

$$y^2 - 12x = 0$$

$$y^2 = 12x$$

$$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 12] \div 4 \Rightarrow P = 3$$

البؤرة $F(3,0)$

معادلة الدليل $x = -3$

$$y^2 + 12x = 0$$

$$y^2 = -12x$$

$$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 12] \div 4 \Rightarrow P = 3$$

البؤرة $F(-3,0)$

معادلة الدليل $x = +3$

القطع الناقص: $c_{\text{ناقص}} = P_{\text{مكافئ}}$

بؤرتاه هما $F_1(3,0)$ , $F_2(-3,0)$

$$\therefore \quad c = 3$$

$$[2b = 10] \div 2 \Rightarrow b = 5$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 5^2 + 3^2 \Rightarrow a^2 = 25 + 9$$

$$a^2 = 34$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{25} = 1}$$

---

**سؤال 7** جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه هي بؤرته القطع المكافئ $y^2 = -8x$ وطول محوره الكبير ثلاث امثال طول محوره الصغير.

2010 تمهيدي

$$y^2 = -8x$$

$$y^2 = -4Px \Rightarrow [4P = 8] \div 4 \Rightarrow P = 2$$

((سينات)) $F(-2,0)$

$$[2a = 3(2b)] \div 2$$

$$a = 3b \ldots\ldots (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$(3b)^2 = b^2 + 4 \Rightarrow 9b^2 = b^2 + 4$$

$$9b^2 - b^2 = 4 \Rightarrow [8b^2 = 4] \div 8$$

$$b^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a = 3b \Rightarrow a = a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$a = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow a^2 = \frac{9}{2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{\frac{9}{2}} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1}$$

موقع طلاب العراق
WWW.iQ-RES.COM

**سؤال 8** جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ومحوره على المحورين الاجداثيين ويمر من بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 16x = 0$ ومساحة منطقة القطع الناقص $20\pi$ وحدة مساحة.

2010 - د (1)

$y^2 = 16x$

$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 16] \div 4 \Rightarrow P = 4$

البؤرة $F(4,0)$

القطع الناقص:

يمر من بؤرة المكافئ $F(4,0)$ أما $a = 4$ أو $b = 4$

$A = ab\pi$

$20\pi = a.b\pi \Rightarrow 20 = a.b$ ......(1)

يوجد لدينا احتمالين:

**الأول:** $a = 4$ نعوض بمعادلة (1)

$[20 = 4b] \div 4 \Rightarrow b = 5$

هذا الاحتمال يُهمل لأن فيه a اصغر من b وهذا لايمكن في القطع الناقص.

**الثاني:** $b = 4$

$[20 = 4a] \div 4 \Rightarrow a = 5$

هذا الاحتمال صح لأن a أكبر من b.

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1}$$

**ملاحظة**

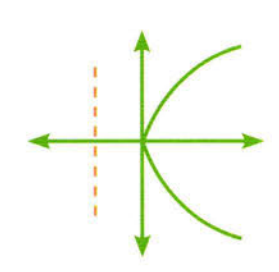
القطع على محور الصادات لأن البؤرة $F(4,0)$ التي مر بها القطع اصبحت b أي انها قطب وبما ان القطب سيني فالقطع صادي لأن البؤرة عكس القطب.

**سؤال 9** قطع ناقص راساه $(\pm5,0)$ وإحدى بؤرتيه هي بؤره القطع المكافئ الذي راسه نقطة الأصل والمار دليله بالنقطة $(-3,4)$ جد معادلة القطعين المكافئ والناقص.



2012
خارج القطر

القطع المكافئ:



القطعان على محور السينات.

$y^2 = 4Px \qquad P = 3$

$y^2 = 4(3)x \Rightarrow y^2 = 12x$ معادلة القطع المكافئ

القطع الناقص:

بؤرتة القطع المكافئ والتي هي إحدى بؤرتي الناقص رأساه $(\pm5,0)$ $\leftarrow F(3,0)$

$c = 3 \qquad a = 5 \qquad b = ?$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$

$b = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16}$

$b = 4$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

**سؤال 10** جد معادلة القطع الناقص الذي تقع بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الأصل والنسبة بين طولي محوريه $2:1$ ويقطع القطع المكافئ $y^2 = 8x$ عند $x = 2$

2013 خارج القطر

$y^2 = 8x$

$y^2 = 8(2) \Rightarrow y^2 = 16$ بالجذر

$y = \mp 4 \quad (2,4) \;,\; (2,-4)$

$\frac{2b}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2b .......(1)$

لأن لدينا $(x, y)$ نستفيد من معادلة القطع الناقص القياسية.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ نعوض $(2,4)$

$\frac{(2)^2}{(2b)^2} + \frac{(4)^2}{b^2} = 1$

$\frac{4}{4b^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{16}{b^2} = 1$

$\frac{17}{b^2} = \frac{1}{1} \Rightarrow b^2 = 17$

$b = \sqrt{17} \Rightarrow a = 2b$

$a = 2\sqrt{17} \Rightarrow a^2 = 68$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{68} + \frac{y^2}{17} = 1$

**سؤال 11** جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين ويقطع من محور السينات جزءاً طوله $(8)$ وحدات ومساحة منطقته $24\pi$ وحدة مساحة.

2012 - د (2)

الجزء المقطوع من محور السينات

أما $2a = 8 \Rightarrow a = 4$

أو $2b = 8 \Rightarrow b = 4$

$A = a.b\pi$

$24\pi = a.b\pi \Rightarrow a.b = 24$

نعوض أولاً $a = 4$

$[4b = 24] \div 4 \Rightarrow b = 6$ يُهمل

لأن $b < a$ أصغر

ثم نعوض $b = 4$

$[4a = 24] \div 4 \Rightarrow a = 6 \quad o.k$

$a > b$ آكبر

$a = 6 \;,\; b = 4$

القطع على محور الصادات لأن الجزء المقطوع منه محور السينات اصبح يمثل $(2b)$ أي محور القطب.

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$

**سؤال 12** جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 12x = 0$ وطول محوره الصغير يساوي (8) وحدات.

2014 تمهيدي

$[2b = 8] \div 2 \Rightarrow b = 4$

$y^2 = 12x$

$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 12] \div 4$

$P = 3 \rightarrow F(3,0)$

| إحدى بؤرتيه | هي | بؤرة القطع المكافئ |
|---|---|---|
| $c_{\text{ناقص}}$ | = | $P_{\text{مكافئ}}$ |

$c = 3$

$a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 = (4)^2 + (3)^2 \Rightarrow a^2 = 16 + 9$

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1}$

**سؤال 13** جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتمي لمحور الصادات ومساحته $(32\pi)$ وحدة مساحة والنسبة بين طولي محوريه كنسبة $\frac{1}{2}$.

2015 - د (2)

$\frac{2b}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2b \ldots\ldots(1)$

$A = a \cdot b\pi$ نعوض معادلة (1) هنا

$32\pi = a \cdot b\pi$

$32 = (2b)(b) \Rightarrow [2b^2 = 32] \div 2$

$b^2 = 16$ بالجذر

$b = 4$ نعوض معادلة (1)

$a = 2(b) = 2(4) \Rightarrow a = 8$

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{64} = 1$

**سؤال 13** جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2 - 16y = 0$ وطول محوره الكبير = 12 وحدة.

2016 تمهيدي

$x^2 - 16y = 0 \Rightarrow x^2 = 16y$

$x^2 = 4Py$

$[4P = 16] \div 4 \Rightarrow P = 4 \quad F(0,4)$

$c = 4$ للناقص

$[2a = 12] \div 2 \Rightarrow a = 6$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$

$b = \sqrt{6^2 - 4^2}$

$b = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20}$

$b^2 = 20$

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{36} = 1$

**سؤال 15** جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبعده البؤري مساوياً لبعد بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 24x = 0$ عن دليله إذا علمت ان مساحة القطع الناقص تساوي $80\pi cm^2$ .

2016 - د (1)

$y^2 = -24x$

$y^2 = -4Px \Rightarrow [4P = 24] \div 4$

$P = 6$

البعد بين بؤرة القطع المكافئ ودليله = 2P

$2c = 2P$

لبعد بؤرة القطع المكافئ عن دليله — مساوياً — بعده البؤري

$\therefore c = P \Rightarrow \boxed{c = 6}$ (للناقص)

$A = a.b\pi$

$80\not\pi = a.b\not\pi \Rightarrow b = \frac{80}{a}$.......(1)

$a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 = \left(\frac{80}{a}\right)^2 + (6)^2$

$\left[a^2 = \frac{6400}{a^2} + 36\right].a^2$

$a^4 = 6400 + 36a^2$

$a^4 - 36a^2 - 6400 = 0$

$(a^2 + 64)(a^2 - 100) = 0$

أما $a^2 + 64 = 0$ $\notin R$

أو $a^2 - 100 = 0 \Rightarrow a^2 = 100 \Rightarrow a = 10$

$b = \frac{80}{a} = \frac{80}{10} \Rightarrow b = 8$

لم يحدد بؤرة القطع

**إنتبه !** على الرغم ان القطع المكافئ على محور السينات إلا ان لم يحدد موقع البؤرة وانما اطوال فقط .

فقال $2c = 2P$ وهذا لا يعني انهما يقعان على نفس المحور .

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$

**سؤال 16** إذا كان $e + id = \frac{4+2i}{1-i}$ جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه $(0, d)$ وطول محوره الكبير يساوي $2\|e + di\|$

2014 نازحين

2016 نازحين

$e + id = \frac{4+2i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}$

$e + id = \frac{4+4i+2i-2}{(1)^1 + (1)^2} = \frac{2+6i}{2}$

$e + di = 1 + 3i \Rightarrow e = 1$

$d = 3$

إحدى بؤرتي القطع الناقص $(0, d) = (0, 3)$

$r = \|e + di\| = \sqrt{e^2 + d^2}$

$= \sqrt{(1)^2 + (3)^2} = \sqrt{10}$

$2a = 2\sqrt{10} \Rightarrow a = \sqrt{10} \Rightarrow a^2 = 10$

$c = 3 \;,\; a = \sqrt{10} \;,\; b = ?$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$

$b = \sqrt{10 - 9} = \sqrt{1}$

$b = 1$

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{10} = 1}$







**سؤال 17** قطع ناقص معادلته $4x^2 + 2y^2 = k$ والبعد بين بؤرتيه $2\sqrt{3}$ وحدة طول جد قيمه $k$.

2008 - د (1)

$[4x^2 + 2y^2 = k] \div k$

$\frac{4x^2}{k} + \frac{2y^2}{k} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{k}{4}} + \frac{y^2}{\frac{k}{2}} = 1$

$[2c = 2\sqrt{3}] \div 2 \Rightarrow \boxed{c = \sqrt{3}}$

$\frac{k}{2}$ أكبر من $\frac{k}{4}$ ((كلما صغر المقام كبر الكسر))

((القطع صادي)) لأن الكبير $\frac{k}{2}$ يقع على محور $(y)$

$a^2 = \frac{k}{2}, \; b^2 = \frac{k}{4}, \; c = \sqrt{3}$

$a^2 = b^2 + c^2$

$\frac{k}{2} = \frac{k}{4} + \left(\sqrt{3}\right)^2$

$\left[\frac{k}{2} = \frac{k}{4} + 3\right].4$

$2k = k + 12$

$2k - k = 12 \Rightarrow \boxed{k = 12}$

**سؤال 18** إذا كان $ky^2 + 3x^2 = z$ معادلة قطع ناقص بؤرتاه تنتميان الى محور السينات ويمر بنقطة تقاطع المستقيم $8x + y = \sqrt{3}$ مع المحور الصادي علماً ان مساحة القطع $2\sqrt{3}\pi$ وحدة مساحة جد $k, Z \in R$ .

2010 - د (2)

((نقطة التتقاطع مع محور الصادات)) $x = 0$ $\qquad 2x + y = \sqrt{3}$

$2(0) + y = \sqrt{3}$

هذه النقطة تمثل القطب لانها على محور $y$ $\quad (0, \sqrt{3})$ $\qquad y = \sqrt{3}$

والبؤرة على محور X اي ان $\quad b = \sqrt{3}$

$$A = a \cdot b\pi \Rightarrow 2\sqrt{3}\pi = a(\sqrt{3})\pi \Rightarrow a = 2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

$$[ky^2 + 3x^2 = Z] \div Z \Rightarrow \frac{3x^2}{Z} + \frac{ky^2}{Z} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{Z}{3}} + \frac{y^2}{\frac{Z}{k}}$$

$a^2 = \frac{Z}{3}$ ، $\frac{Z}{k} = b^2$

$$\frac{Z}{3} = a^2 \Rightarrow \frac{Z}{3} = 4 \Rightarrow \boxed{Z = 12}$$

$$\frac{Z}{k} = b^2 \Rightarrow \frac{12}{k} = 3 \Rightarrow k = \frac{12}{3} \Rightarrow \boxed{k = 4}$$

Notes:

## انسحاب المحاور للقطع الناقص

الانسحاب:
- المعادلة بالشكل القياسي لا تحتاج ترتيب
- المعادلة ليست بالشكل تحتاج إلى ترتيب



**أولاً** إذا أعطى معادلة بالشكل القياسي (لا تحتاج ترتيب)

على محور السينات $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

- معادلة المحور الكبير $y=k$
- معادلة المحور الصغير $x=h$

على محور الصادات $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

- معادلة المحور الكبير $x=h$
- معادلة المحور الصغير $y=k$

موقع طلاب العراق
WWW.iQ-RES.COM

### ملاحظات

**أولاً:** نجد $h,k$ وتمثل احداثي المركز $o(h,k) \Leftarrow h$ مع قوس $x$ و $k$ مع قوس $y$ نأخذهما بعكس الاشارة.

**ثانياً:** نجد $a^2$ , $b^2$ من المعادلة القياسية ثم نجد $c$ باستخدام القانون العام ادناه:

$$a^2=b^2+c^2$$

**ثالثاً:** نجد مطاليب السؤال.





موقع طلاب العراق قناتنا على التلي كرام @iQRES WWW.iQ-RES.COM

**مثال 1** جد البؤرتين والرأسين والقطبين وطول ومعادلة كل من المحورين للقطع الناقص

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$$




$h=+2 \quad , \quad k=+1 \Rightarrow o(h,k) \Rightarrow o(2,1)$

$a^2=25 \Rightarrow a=5$ على محور الصادات

$b^2=9 \Rightarrow b=3$

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}$

$c=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$

البؤرتان:

$\overline{F}_1(h,c+k) \Rightarrow \overline{F}_1(2,4+1) \Rightarrow \overline{F}_1(2,5)$

$\overline{F}_2(h,-c+k) \Rightarrow \overline{F}_2(2,-4+1) \Rightarrow \overline{F}_2(2,-3)$

الرأسان:

$\overline{V}_1(h,a+k) \Rightarrow \overline{V}_1(2,5+1) \Rightarrow \overline{V}_1(2,6)$

$\overline{V}_2(h,-a+k) \Rightarrow \overline{V}_2(2,-5+1) \Rightarrow \overline{V}_2(2,-4)$

القطبان:

$\overline{M}_1(b+h,k) \Rightarrow \overline{M}_1(3+2,1) \Rightarrow \overline{M}_1(5,1)$

$\overline{M}_2(-b+h,k) \Rightarrow \overline{M}_2(-3+2,1) \Rightarrow \overline{M}_2(-1,1)$

طول المحور الكبير $= 2a=2(5)=10$ وحدة طول

طول المحور الصغير $= 2b=(2)(3)=6$ وحدة طول

الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}=0.8$

$x=h \Rightarrow \boxed{x=2}$ ← معادلة المحور الكبير

$y=k \Rightarrow \boxed{y=1}$ ← معادلة المحور الصغير

**مثال 2** عيّن كل من البؤرتين والرأسين والقطبين والمركز ثم جد طول ومعادلة المحورين والاختلاف المركزي

$$\frac{(x-4)^2}{81}+\frac{(y+1)^2}{25}=1$$

مركز $h=4 \quad , \quad k=-1 \Rightarrow o\,(h,k) \Rightarrow o\,(4,-1)$

$a^2=81 \Rightarrow a=9$

$b^2=25 \Rightarrow b=5$

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2} \Rightarrow c=\sqrt{81-25}=\sqrt{56}=\sqrt{4\times 14}$

$c=2\sqrt{14}$

البؤرتان:

$\overline{F}_1\,(c+h,k) \Rightarrow (2\sqrt{14}+4,-1)$

$\overline{F}_2\,(-c+h,k) \Rightarrow (-2\sqrt{14}+4,-1)$

الرأسان:

$\overline{V}_1\,(a+h,k) \Rightarrow \overline{V}_1\,(9+4,-1) \Rightarrow \overline{V}_1\,(13\,,\,-1)$

$\overline{V}_2\,(-a+h,k) \Rightarrow \overline{V}_2\,(-9+4,-1) \Rightarrow \overline{V}_2\,(-5\,,\,-1)$

القطبان:

$\overline{M}_1\,(h,b+k) \Rightarrow \overline{M}_1\,(4,\,5-1) \Rightarrow \overline{M}_1\,(4\,,\,4)$

$\overline{M}_2\,(h,-b+k) \Rightarrow \overline{M}_2\,(4,\,-5-1) \Rightarrow \overline{M}_2\,(4\,,\,-6)$

طول المحور الكبير = $2a=2\,(9)=18$ وحدة طول

طول المحور الصغير = $2b=2\,(5)=10$ وحدة طول

معادلة المحـور الكبير ← $y=k \Rightarrow \boxed{y=-1}$

معادلة المحور الصغير ← $x=h \Rightarrow \boxed{x=4}$

## ثانياً إذا أعطى معادلة غير مرتبة بالشكل القياسي (تحتاج إلى ترتيب)

**أولاً** نفتح قوسين ونضع بالأول $x$ وجماعتها وفي القوس الثاني $y$ وجماعتها وبين القوسين نضع +

| العدد = ($y$ وجماعتها) + ($x$ وجماعتها) |
|---|

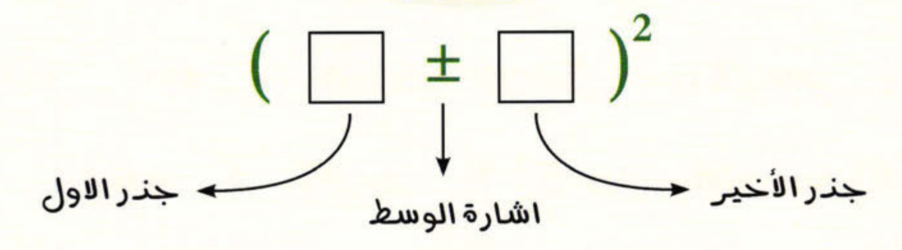
**ثانياً** نسحب معامل $x^2$ ومعامل $y^2$ عامل مشترك

**ثالثاً** نضيف $^2$(نصف معامل $x$) للقوس الذي يحوي جماعة $x$

ونضيف $^2$(نصف معامل $y$) للقوس الذي جماعة $y$

* نضيف $\left(\text{نصف معامل} < \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)^2$ بعد ضربها بالعدد الموجود خارج القوس (العامل المشترك) الى الطرف الثاني الي يحتوي العدد.

**رابعاً** نحلل كل قوس باستخدام طريقة المربع الكامل كالتالي:




**خامساً** نقسم على العدد الذي في الطرف الثاني لكي تصبح المعادلة قياسية.

**مثال 3** جد البؤرتين والرأسين والقطبين وطول ومعادلة كل من المحورين للقطع الناقص الذي معادلته

$$9x^2+16y^2-72y-96y+144=0$$

جماعة x    جماعة y    العدد

$(9x^2-72x)+(16y^2-96y)=-144$

نسحب معامل $x^2$ و $y^2$ عامل مشترك

$9\ (x^2-8x)+16\ (y^2-6y)=-144$

$9\ (x^2-8x+16)+16\ (y^2-6y+9)=-\cancel{144}+\cancel{144}+144$

$\left[9\ (x-4)^2+16\ (y-3)^2=+144\right]\div 144$

$\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$    القطع على السينات

المركز $h=4\ ,\ k=3 \Rightarrow o(h,k) \Rightarrow o(4,3)$

$a^2=16 \Rightarrow \boxed{a=4}\ ,\quad b^2=9 \Rightarrow \boxed{b=3}$

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}$

$c=\sqrt{16-9} \Rightarrow \boxed{\sqrt{7}}$

البؤرتان:

$\overline{F}_1\ (c+h,k) \Rightarrow \overline{F}_1\ (\sqrt{7}+4\ ,\ 3)$

$\overline{F}_2\ (-c+h,k) \Rightarrow \overline{F}_2\ (-\sqrt{7}+4\ ,\ 3)$

الرأسان:

$\overline{V}_1\ (a+h,k) \Rightarrow \overline{V}_1\ (4+4\ ,\ 3) \Rightarrow \overline{V}_1\ (8\ ,\ 3)$

$\overline{V}_2\ (-a+h,k) \Rightarrow \overline{V}_2\ (-4+4\ ,\ 3) \Rightarrow \overline{V}_2\ (0\ ,\ 3)$

القطبان:

$\overline{M}_1\ (h,b+k) \Rightarrow \overline{M}_1\ (4\ ,\ 3+3) \Rightarrow \overline{M}_1\ (4\ ,\ 6)$

$\overline{M}_2\ (h,-b+k) \Rightarrow \overline{M}_2\ (4\ ,\ -3+3) \Rightarrow \overline{M}_2\ (4\ ,\ 0)$

طول المحور الكبير $2a=2\ (4)=8$ وحدة طول

طول المحور الصغير $2b=2\ (3)=6$ وحدة طول

معادلة المحور الكبير $y=k \Rightarrow \boxed{y=3}$

معادلة المحور الصغير $x=h \Rightarrow \boxed{x=4}$



4 مثال ناقش خصائص القطع التالي :

$$x^2 + 25y^2 + 4x - 150y + 204 = 0$$

$$(x^2 + 4x) + (25y^2 - 150y) = -204$$

$$1\ (x^2 + 4x) + 25\ (y^2 - 6y) = -204$$

$$(x^2 + 4 + 4) + 25\ (y^2 - 6y + 9) = -204 + 4 + 225$$



القطع على السينات $\left[(x+2)^2 + 25\ (y-3)^2 = 25\right] \div 25 \Rightarrow \frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{1} = 1$

المركز $\boxed{h = -2}\ ,\ \boxed{k = 3} \Rightarrow o\ (h,k) \Rightarrow o\ (-2,3)$

$$a^2 = 25 \Rightarrow \boxed{a = 5}\ ,\ b^2 = 1 \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} \Rightarrow c = \sqrt{25 - 1} = \sqrt{24}$$

$$\boxed{c = 2\sqrt{6}}$$

البؤرتان

$$\overline{F}_1\ (c + h, k) \Rightarrow \overline{F}_1\ (2\sqrt{6} - 2\ ,\ 3)$$

$$\overline{F}_2\ (-c + h, k) \Rightarrow \overline{F}_2\ (-2\sqrt{6} - 2\ ,\ 3)$$

الرأسان

$$\overline{V}_1\ (a + h, k) \Rightarrow \overline{V}_1\ (5 - 2\ ,\ 3) \Rightarrow \overline{V}_1\ (3\ ,\ 3)$$

$$\overline{V}_2\ (-a + h, k) \Rightarrow \overline{V}_2\ (-5 - 2\ ,\ 3) \Rightarrow \overline{V}_2\ (-7\ ,\ 3)$$

القطبان

$$\overline{M}_1\ (h, b + k) \Rightarrow \overline{M}_1\ (-2\ ,\ 1 + 3) \Rightarrow \overline{M}_1\ (-2\ ,\ 4)$$

$$\overline{M}_2\ (h, -b + k) \Rightarrow \overline{M}_2\ (-2\ ,\ -1 + 3) \Rightarrow \overline{M}_2\ (-2\ ,\ 2)$$

الأختلاف المركزي $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$



WWW.iQ-RES.COM

@iQRES قناتنا على التلي كرام
موقع طلاب العراق

مساحة $A = a \cdot b \pi$

مساحة $A = (5)(1)\pi \Rightarrow A = 5\pi$ وحدة مربعة

محيط $P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

محيط $P = 2\pi\sqrt{\frac{25+1}{2}} \Rightarrow P = 2\sqrt{13}\,\pi$

طول المحور الكبير = $2a = 2(5) = 10$ وحدة طول

طول المحور الصغير = $2b = 2(1) = 2$ وحدة طول

المسافة بين بؤرتين = $2c = 2(2\sqrt{6}) = 4\sqrt{6}$ وحدة طول

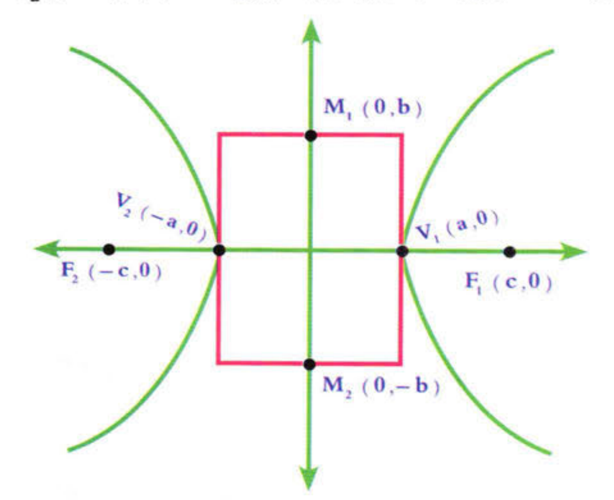
معادلة المحــور الكبير $\boxed{y = 3}$

معادلة المحور الصغير $\boxed{y = -2}$

## Notes:

# القطع الزائد

**تعريف:** هو مجموعة من النقط في المستوي التي تكون القيمة المطلقة لفرق بعدي اي منها عن نقطتين ثابتين (( البؤرتان )) يساوي عدداً ثابتاً .




قطع زائد بؤرتاه على محور السينات

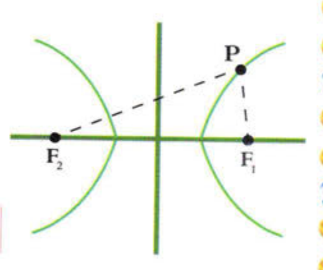
البؤرتان $F_1\ (c,0)$ ، $F_2\ (-c,0)$

الرأسان $V_1\ (a,0)$ ، $V_2\ (-a,0)$

القطبان $M_1\ (0,b)$ ، $M_2\ (-b,0)$

* النقطتان $(0,b)-(0,-b)$ سوف نسميها القطبان فقط للتوضيح لم يطلق عليها اسم اقطاب في المنهج .

المعادلة القياسية : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

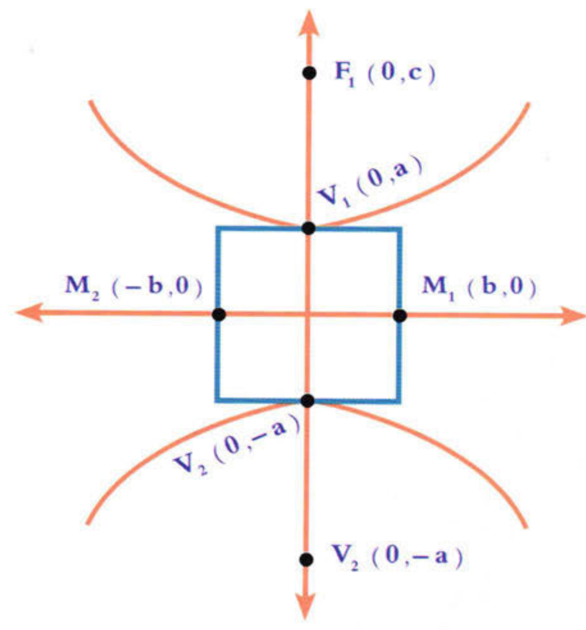



$PF_1$ يُسمى نصف القطر البؤري الايمن

$PF_2$ يُسمى نصف القطر البؤري الايسر

$|PF_1 - PF_2| = 2a$

$|PF_1 - PF_2|$ / القيمة المطلقة للفرق بين بعدي أي نقطة عن بؤرتيه .




قطع زائد بؤرتاه على محور الصادات

البؤرتان $F_1\ (0,c)$ ، $F_2\ (0,-c)$

الرأسان $V_1\ (0,a)$ ، $V_2\ (0,-a)$

القطبان $M_1\ (0,b)$ ، $M_2\ (0,-b)$

المعادلة القياسية : $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

## ملاحظات

**أولاً:** مصطلحات القطع الزائد :

$2a$ = طول المحور الحقيقي أو العدد الثابت أو البعد بين الرأسين .

$2b$ = طول المحور المرافق ((التخيلي)) وهو عمودي المحور الحقيقي .

$2c$ = البعد بين البؤرتين .

---

**ثانياً:** في القطع الزائد ( c أكبر a ، c أكبر b ) دائماً وقد تكون $a = b$ أو a أكبر b أو a أصغر b

---

**ثالثاً:** لاحظ المعادلة القياسية :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

السينات     الصادات

دائماً أول رقم يمثل $a^2$ والثاني $(b^2)$ لا يتغير .

---

**رابعاً:** لا يوجد قانون للمساحة والمحيط في القطع الزائد .

---

**خامساً:** الاختلاف المركزي (e) أكبر من (1) لذلك ان وجدت اختلاف مركزي أكبر من (1) هذا قطع زائد حتى وإن لم يذكر نوع القطع .

---

**سادساً:** في القطع الزائد :

1. كل كلمة يمر $(x,0)$ أو $(0,y)$ يعني هذا (a)
2. كل يمس هذه a
3. كل يقطع عند رقم $x = \pm$ ، رقم $y = \pm$ هذا الرقم هو (a)

---

**سابعاً:** القوانين :

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a}$

# العلاقات بين القطوع

تعلم كيف تحدد العلاقة بين القطوع من خلال الأمثلة التوضيحية الآتية :

**1** لو قال في السؤال مثلاً :

جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه // هي بؤرته القطع المكافئ

ناقص — c — P

معناها علامة يساوي =

| $P$ مكافئ | = | $C$ ناقص |
|---|---|---|

**2** لو قال في السؤال مثلاً :

جد معادلة القطع الزائد الذي رأساه // هما بؤرتا القطع الناقص

زائد — a — ناقص c

| $C$ ناقص | = | $a$ زائد |
|---|---|---|

**3** لو قال في السؤال مثلاً :

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنطبقان // على بؤرتي القطع الزائد

ناقص — c — c — زائد

معناها علامة يساوي =

| $C$ زائد | = | $C$ ناقص |
|---|---|---|

**4** لو قال في السؤال مثلاً :

جد معادلة القطع الناقص الذي أحد قطباه // هو رأس القطع الزائد

ناقص — b — a — زائد

معناها علامة يساوي =

| $a$ زائد | = | $b$ ناقص |
|---|---|---|

**5** عبارة قطعان زائد وناقص كل منهما يمر ببؤرة الاخر معناها :

راجع السؤال الخامس والثامن عشر في الاسئلة الوزارية

| $c$ زائد | = | $a$ ناقص |
|---|---|---|
| $c$ ناقص | = | $a$ زائد |

* عندما يذكر عبارة قطع زائد قائم معناها

طول المحور الحقيقي = طول المحور المرافق

$e = \sqrt{2}$ وأن $2a = 2b \Rightarrow a = b$

## مقارنة بين القطع الناقص والزائد

| القطع الناقص | القطع الزائد |
|---|---|
| أولاً: له مساحة ومحيط فكل سؤال يحوي مساحة ومحيط هذه القطع ناقص | أولاً: لا يوجد له مساحة ومحيط لذلك السؤال الذي فيه مساحة أو محيط ولم يذكر نوع القطع فهو ناقص. |
| ثانياً: الاختلاف المركزي أصغر من (1) | ثانياً: الاختلاف المركزي أكبر من (1) |
| ثالثاً: a أكبر من b,c | ثالثاً: c أكبر من b,a |
| رابعاً: المعادلة القياسية ذات اشارة موجبة $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ , $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ | رابعاً: المعادلة القياسية ذات اشارة سالبة $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ , $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ |
| خامساً: المصطلحات: طول المحور الكبير = 2a طول المحور الصغير = 2b | خامساً: المصطلحات: طول المحور الحقيقي = 2a طول المحور المرافق = 2b |
| سادساً: يقطع المحورين عند a,b | سادساً: يقطع محور واحد عند a |


موقع طلاب العراق
WWW.iQ-RES.COM


### أمثلة توضيحية:

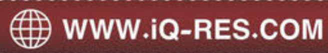
قطع مخروطي مساحته $20\pi\ cm^2$ ..... الخ ← القطع ناقص / فيه مساحة.

قطع مخروطي اختلافه المركزي 1.2 .... الخ ← القطع زائد / e أكبر من (1).

قطع مخروطي رأسه (5,0) وإحدى بؤرتيه (3,0) .... الخ / القطع ناقص/ $a > c$ (أكبر)

قطع مخروطي رأسه (10,0) ويمر من (0,6) ..... الخ / قطع ناقص يقطع المحورين a,b

قطع مخروطي طول محوره الحقيقي 12 وحدة .... الخ/ قطع زائد/ من مصطلح محور حقيقي.



WWW.iQ-RES.COM

قناتنا على التلي كرام @iQRES
موقع طلاب العراق

**مثال** عيّن البؤرتان والرأسان وطول المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الزائدة التالية ثم ارسمها:

(1) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$

$a^2=64 \Rightarrow \boxed{a=8}$

$b^2=36 \Rightarrow \boxed{b=6}$

$c^2=a^2+b^2$

$c^2=64+36 \Rightarrow c^2=100 \Rightarrow c=10$

(1) البؤرتان:

$F_1(c,0) \Rightarrow F_1(10,0)$

$F_2(-c,0) \Rightarrow F_2(-10,0)$

(2) الرأسان:

$V_1(a,0) \Rightarrow V_1(8,0)$

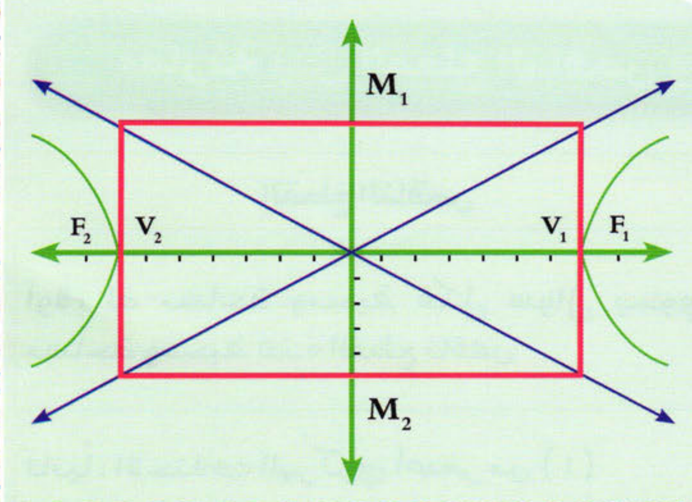
$V_2(-a,0) \Rightarrow V_2(-8,0)$

(3) طول المحور الحقيقي $=2a=16$ وحدة

(4) طول المحور المرافق $=2b=12$ وحدة

(5) الاختلاف المركزي:

$e=\frac{c}{a}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$




(2) $12x^2-4y^2=48$

$[12x^2-4y^2=48]\div 48$

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$

$a^2=4 \Rightarrow \boxed{a=2}$

$b^2=12 \Rightarrow \boxed{b=2\sqrt{3}}$

$c^2=a^2+b^2$

$c^2=4+12 \Rightarrow c^2=16 \Rightarrow \boxed{c=4}$

(1) البؤرتان:

$F_1(c,0) \Rightarrow F_1(4,0)$

$F_2(-c,0) \Rightarrow F_2(-4,0)$

(2) الرأسان:

$V_1(a,0) \Rightarrow V_1(2,0)$

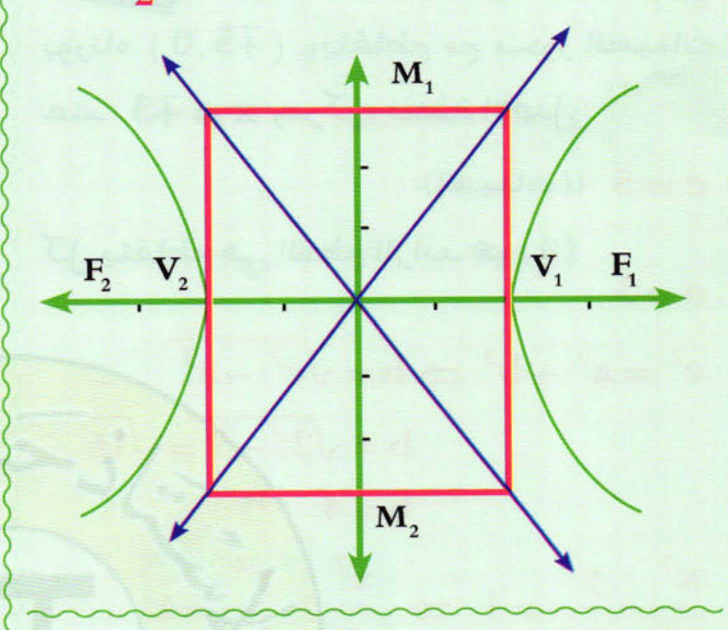
$V_2(-a,0) \Rightarrow V_2(-2,0)$

(3) طول المحور الحقيقي $=2a=4$ وحدة

(4) طول المحور المرافق $=2b=4\sqrt{3}$ وحدة

5 الاختلاف المركزي : $e = \frac{c}{a}$

$e = \frac{4}{2} = 2 > 1$




3 $\left[16x^2 - 9y^2 = 144\right] \div 144$

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

$a^2 = 9 \Rightarrow \boxed{a = 3}$

$b^2 = 16 \Rightarrow \boxed{b = 4}$

$c^2 = a^2 + b$

$c^2 = 9 + 16 \Rightarrow c^2 = 25 \Rightarrow \boxed{c = 5}$

1 البؤرتان :

$F_1\ (c, 0) \Rightarrow F_1\ (5, 0)$

$F_2\ (-c, 0) \Rightarrow F_2\ (-5, 0)$

2 الرأسان :

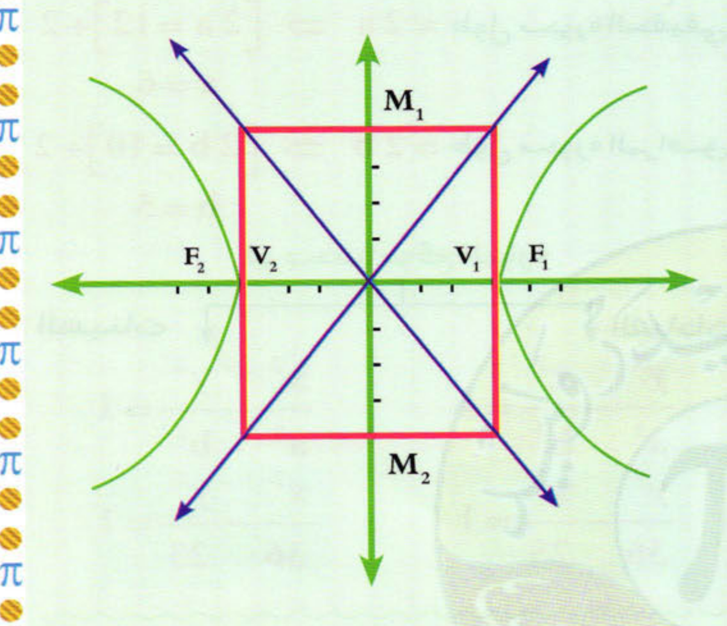
$V_1\ (a, 0) \Rightarrow V_1\ (3, 0)$

$V_2\ (-a, 0) \Rightarrow V_2\ (-3, 0)$

طول المحور الحقيقي ← وحدة $2a = 2 \times 3 = 6$

طول المحور المرافق ← وحدة $2b = 2 \times 4 = 8$

$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$




**طريقة رسم القطع الزائد:**

1 نعين الرأسان $V_1, V_2$

2 نعين النقطتين $M_1, M_2$

3 هذه النقاط الاربعة تكون مستطيل اضلاعه توزاي المحورين .

4 نرسم قطري المستطيل فهما يمثلان المحاذيان .

5 نعين البؤرتين $F_1, F_2$ ثم نرسم ذراعي القطع .

**أولاً:** الاسئلة التي يعطي فيها (البؤرة - الرأس) طول الحورين الحقيقي أو المرافق وهذه لا تحتاج الى معادلات آنية:

**مثال 1** جد معادلة القطع الزائد الذي طول محوره الحقيقي (12) وحدة طول وطول محوره المرافق (10) وحدة طول .

طول محوره الحقيقي $= 2a \Rightarrow [2a = 12] \div 2$

$a = 6$

طول محوره المرافق $= 2b \Rightarrow [2b = 10] \div 2$

$b = 5$

لم يحدد موقع البؤرة

السينات

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1$$

الصادات

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{25} = 1$$

**مثال 2** جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وطول محوره المرافق (4) وحدات وبؤرتاه $(0, \sqrt{8})$ , $(0, -\sqrt{8})$ .

طول محوره المرافق $= 2b \Rightarrow [2b = 4] \div 2$

$b = 2$

$c = \sqrt{8}$ ((صادات))

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$a = \sqrt{8 - 4} = \sqrt{4}$$

$a = 2$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1$$

**مثال 3** جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $(\mp 5, 0)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x = \mp 3$ ومركزه نقطة الأصل .

$c = 5$ ((سينات))

كل يتقاطع في القطع الزائد هو (a)

$a = 3$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16}$$

$b = 4$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

**مثال 4** جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وطول محوره الحقيقي (6) وحدات والاختلاف المركزي (2) والبؤرتان على محور السينات .

طول محوره الحقيقي $= 2a \Rightarrow [2a = 6] \div 2$

$a = 3$

تعويض

$$e = \frac{c}{a}$$

$$2 = \frac{c}{3} \Rightarrow c = 6$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27}$$

$b^2 = 27$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$$

**ثانياً:** اسئلة الدرجة الثانية والتي تحتاج الى معادلتين آنياً :

**مثال 5** جد معادلة القطع الزائد الذي طول محوره المرافق $(2\sqrt{2})$ وحدة واختلافه المركزي يساوي (3) ومركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور الصادات .

طول محوره المرافق $= 2b \Rightarrow [2b = 2\sqrt{2}] \div 2$

$b = \sqrt{2}$

$e = \dfrac{c}{a}$

$3 = \dfrac{c}{a} \Rightarrow c = 3a \quad .......(1)$

$c^2 = a^2 + b^2$ القانون العام

$(3a)^2 = a^2 + (\sqrt{2})^2$

$9a^2 - a^2 = 2 \Rightarrow [8a^2 = 2] \div 8$

$a^2 = \dfrac{1}{4}$

$\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\dfrac{y^2}{\frac{1}{4}} - \dfrac{x^2}{2} = 1}$

**مثال 6** قطع زائد طول محوره الحقيقي (6) وحدات وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $(1, 2\sqrt{5})$ $(1, -2\sqrt{5})$ جد معادلتي القطعين المكافئ والزائد .

ربع أول $(1, 2\sqrt{5})$ ربع رابع $(1, -2\sqrt{5})$

القطع المكافئ : الفتحة يمين

$y^2 = 4Px$

$(2\sqrt{5})^2 = 4P(1)$

$[20 = 4P] \div 4 \Rightarrow P = 5$



$y^2 = 4(5)x \Rightarrow y^2 = 20x$

القطع الزائد :

طول محوره الحقيقي $= 2a \Rightarrow [2a = 6] \div 2$

$a = 3$

| إحدى بؤرتيه | هي | بؤرة القطع المكافئ |
|---|---|---|
| $c$ زائد | $=$ | $P$ مكافئ |

$c = 5$

$\therefore c = 5$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$

$b = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16}$

$b = 4$

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1}$


زوروا موقعنا للمزيد
WWW.iQ-RES.COM
موقع طلاب العراق

**مثال 7** جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ ويمس دليل القطع المكافئ $x^2+12y=0$

القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$$

$a^2=25 \Rightarrow a=5$

$b^2=9 \Rightarrow b=3$

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}$

$c=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}$

$c=4$

القطع المكافئ:

$x^2+12y=0$

$x^2=-12y$

$x^2=-4Py \Rightarrow [4P=12]\div 4$

$P=3$

القطع الزائد:

بؤرتاه = هما = بؤرتي القطع الناقص

$c_{\text{زائد}} = c_{\text{ناقص}}$

$c=4$

كل يمس هو (a)

$a=P \Rightarrow a=3$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b=\sqrt{c^2-a^2}$

$b=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$

$b^2=7$

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}=1$$

**مثال 8** جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتا القطع الزائد $x^2-3y^2=12$ والنسبة بين طولي محوريه = $\frac{5}{3}$ ومركزه نقطة الاصل

القطع الزائد:

$[x^2-3y^2=12]\div 12$

$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow$

$c^2=a^2+b^2$

$c^2=12+4 \Rightarrow c^2=16 \Rightarrow c=4$

القطع الناقص:

بؤرتاه هما بؤرتي القطع الزائد

$c_{\text{ناقص}} = c_{\text{زائد}}$

$c=4$

النسبة بين طولي محوريه = $\frac{\text{كبير}}{\text{صغير}}=\frac{5}{3}$

$\frac{5}{3}=\frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}a}$

$[3a=5b]\div 5 \Rightarrow b=\frac{5}{3}a \quad ......(1)$

$a^2=b^2+c^2$

$a^2=\left(\frac{5}{3}a\right)^2+(4)^2$

$[a^2=\frac{9}{25}a^2+16].25$

$25a^2-9a^2=400 \Rightarrow 25a^2-9a^2=400$

$[16a^2=400]\div 16 \Rightarrow a^2=25 \Rightarrow a=5$

نعوض المعادلة (1)

$b=\frac{3}{5}a$

$b=\frac{3}{\cancel{5}}(\cancel{5}) \Rightarrow b=3$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1}$$

**ملاحظة ومثال** إذا أعطى البعد بين البؤرتين وأحد الرأسين بالترتيب فأن :

$2a$ = **حاصل طرح البعدين** ، $2c$ = **مجموع البعدين**

**مثال 9** أكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل إذا علمت ان أحد الرأسين يبعد بالبعد $1،9$ وحدات بالترتيب عن البؤرتين وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين .

المجموع $9+1=2c \Rightarrow [2c=10] \div 2$

$c=5$

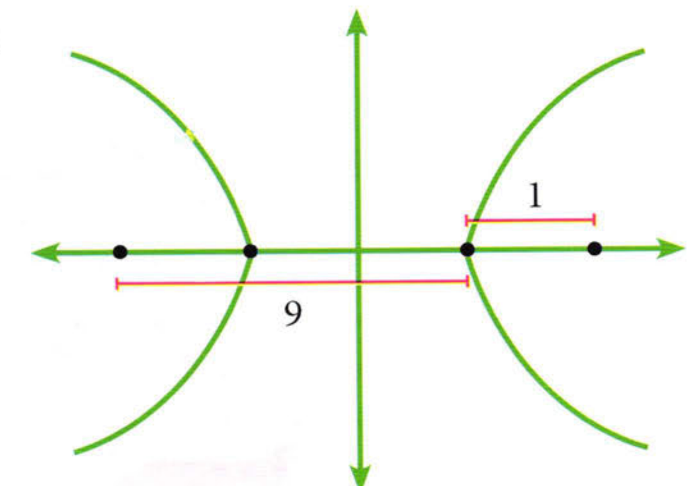
الطرح $9-1=2a \Rightarrow [2a=8] \div 2$

$a=4$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b=\sqrt{c^2-a^2}$

$b=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}$

$b=3$




رسم توضيحي تم اخذه على محور السينات

لم يحدد موقع البؤرة

1. سينات $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

2. صادات $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$

**ملاحظة ومثال** إذا أعطى احداثي نقطة $(x,y)$ أحد الاحداثيات مجهول نعوض النقطة بالمعادلة ونجد المجهول .

أما إذا طلب طول نصف القطر البؤري الايمن $PF_1$ وهو البعد بين النقطة والبؤرة الموجبة $F_1$ والاخر نصف القطر البؤري الايسر $PF_2$ وهو البعد بين النقطة والبؤرة السالبة .

**مثال 10** النقطة $P(6,L)$ تنتمي الى القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ومعادلته $x^2 - 3y^2 = 12$ جد :

**أولاً**: قيمة $(L)$ .

النقطة $P(6,L)$ تحقق معادلة القطع الزائد . ($x, y$)

$$x^2 - 3y^2 = 12$$

$$(6)^2 - 3L^2 = 12 \Rightarrow 36 - 3L^2 = 12$$

$$36 - 12 = 3L^2$$

$$[24 = 3L^2] \div 3$$

$$L^2 = 8$$ بالجذر

$$L = \pm 2\sqrt{2}$$

**ثانياً**: نصف القطر البؤري الايمن $PF_1$ للقطع المرسوم من الجهة اليمنى للنقطة P

$PF_1$ ← النقطة $P(\quad)$ ، البؤرة $F_1(\quad)$

نجد $F_1$ اولاً ثم نجد المسافة بين $F_1$ والنقطة P

$$\left[x^2 - 3y^2 = 12\right] \div 12$$

$$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$$a^2 = 12$$

$$b^2 = 4$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 12 + 4$$

$$c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$$

$F_1(4,0)$ ، $(x_1, y_1)$ ، $P(6, 2\sqrt{2})$ ، $(x_2, y_2)$ ← (قيمة L)

$$PF_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$PF_1 = \sqrt{(6-4)^2 + (2\sqrt{2} - 0)^2}$$

$$PF_1 = \sqrt{(2)^2 + (2\sqrt{2})^2}$$

$$PF_1 = \sqrt{4+8} = \sqrt{12}$$

$$PF_1 = 2\sqrt{3}$$ وحدة



**مثال 11** قطع زائد مركزه نقطة الأصل ومعادلته $hx^2 - ky^2 = 90$ وطول محوره الحقيقي ( $6\sqrt{2}$ ) وحدة وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتا القطع الناقص الذي معادلته $9x^2 + 16y^2 = 576$ جد قيمه $h, k \in R$ .

$$\left[9x^2 + 16y^2 = 576\right] \div 576$$

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1 \quad , \quad a^2 = 64 \quad b^2 = 36$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{64 - 36} = \sqrt{28}$$

$$c = 2\sqrt{7}$$

القطع الزائد :

طول محوره الحقيقي $= 2a \Rightarrow \left[2a = 6\sqrt{2}\right] \div 2$

زائد $a = 3\sqrt{2}$

| بؤرتاه | تنطبقان | على بؤرة القطع الناقص |
| --- | --- | --- |
| $c_{\text{زائد}}$ | $=$ | $c_{\text{ناقص}}$ |

زائد $c = 2\sqrt{7}$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{28 - 18}$$

$$b = \sqrt{10} \Rightarrow b^2 = 10$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{10} = 1}$$

معادلة السؤال (التي تحوي مجاهيل)

$$\left[hx^2 - ky^2 = 90\right] \div 90$$

$$\frac{x^2}{\frac{90}{h}} - \frac{y^2}{\frac{90}{k}} = 1$$

$$\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{10} = 1$$

$$\frac{90}{h} = 18 \Rightarrow h = \frac{90}{18} \Rightarrow h = 5$$

$$\frac{90}{k} = 10 \Rightarrow k = \frac{90}{10} \Rightarrow k = 10$$

**إستراحة شعرية :**

ويا ليتَ أبوابَ المدينةِ كُلَّها
تُسَدُّ وبابٌ فيْ فؤادِكَ يُفتَحُ

## إيجاد معادلة القطع الزائد بإستخدام التعريف

**أولاً :** نجد البؤرة $F_1$ والبؤرة $F_2$

**ثانياً:** نستخدم قانون البعد بين نقطتين

$PF_1$: $(x_2, y_2)$ → $P(x, y)$ ، $(x_1, y_1)$ → $F_1(c, 0)$

$$PF = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$PF_2$: $(x_2, y_2)$ → $P(x, y)$ ، $(x_1, y_1)$ → $F_2(-c, 0)$

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

* هناك عدة خطوات لحل السؤال :

القانون ← التعويض ← التحويل ← التربيع ← الارجاع ← التربيع ثم تصفية الطرفين

التحويل: تحويل أحد الجذرين إلى الطرف الأيمن

الارجاع: ارجاع الجذر الى الطرف الأيسر

" التحضير اليومي "
سر من اسرار التفوق
فلا تهمل هذا السر
WWW.iQ-RES.COM

**مثال 12** باستخدام التعريف جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $(2,\sqrt{2},0)$ , $(-2\sqrt{2},0)$ , $(0,\sqrt{2},0)$ وينطبق محوره على المحورين الاحداثيين والقيمه المطلقة للفرق بين بعدي أي نقطة عن بؤرتيه = 4 وحدات .

$(x_1, y_1)$ $\quad$ $(x, y)$

$F_1(2\sqrt{2},0)$ $\quad$ $F_1(2\sqrt{2},0)$

$F_2(-2\sqrt{2},0)$ $\quad$ $F_2(-2\sqrt{2},0)$

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

القانون $\left|\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} - \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\right| = 2a$

التعويض $\sqrt{(x-2\sqrt{2})^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x+2\sqrt{2})^2+(y-0)^2} = \pm 4$

هذا الجذر يبقى — ننقل الجذر للطرف الاخر

تربيع الطرفين $\sqrt{(x-2\sqrt{2})^2+y^2} = \pm 4 + \sqrt{(x+2\sqrt{2})^2+y^2}$

$(x-2\sqrt{2})^2 + \cancel{y^2} = 16 \pm 8\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2+y^2} + (x+2\sqrt{2})^2 + \cancel{y^2}$

الجذر حذف مع التربيع — هذا الطرف مربع حدانية

فتح القوس $\cancel{x^2} - 4\sqrt{2}x + \cancel{8} = 16 \pm 8\sqrt{x^2+4\sqrt{2}\ x+8+y^2} + \cancel{x^2} + 4\sqrt{2}x + \cancel{8}$

ارجاع الجذر إلى الطرف الاصلي

التصفية $\mp 8\sqrt{x^2+4\sqrt{2}\ x+8+y^2} = 16+4\sqrt{2}x+4\sqrt{2}x$

$\left[\mp 8\sqrt{x^2+4\sqrt{2}\ x+8+y^2} = 16+8\sqrt{2}x\right] \div 8$

تربيع الطرفين $\sqrt{x^2+4\sqrt{2}\ x+8+y^2} = (2+\sqrt{2}\ x)$

$x^2 + \cancel{4\sqrt{2}x} + 8 + y^2 = 4 + \cancel{4\sqrt{2}x} + 2x^2$

$2x^2 - x^2 - y^2 = 8-4 \Rightarrow [x^2 - y^2 = 4] \div 4$

$$\boxed{\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1}$$



## الاسئلة الوزارية الخاصة بالقطع الزائد والربط بين القطوع الثلاثة

**سؤال 1** جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$ وأحد رأسيه بؤرة القطع المكافئ $y^2+8x=0$ .

1997 - د (2)

القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$$

$a^2=36 \quad , \quad b^2=20$ ((سينات))

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}$$

$$c=\sqrt{36-20}=\sqrt{16}$$

$$c=4$$

القطع المكافئ:

$$y^2=-8x$$

$$y^2=-4Px \Rightarrow [4P=8]\div 4$$

القطع الزائد:

$C_{\text{زائد}} = C_{\text{ناقص}} \Rightarrow c=4$

$P_{\text{مكافئ}} = a_{\text{زائد}} \Rightarrow a=2$

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b=\sqrt{c^2-a^2}$$

$$b=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}$$

$$b^2=12$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$$

**سؤال 2** جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص $3x^2+5y^2=120$ والنسبة بين طول محوره الحقيقي والبعد بين بؤرتيه كنسبة $\frac{1}{2}$ .

2001 - د (1)

القطع الناقص: $\left[\frac{3x^2}{120}+\frac{5y^2}{120}=\frac{120}{120}\right]\div 120$

$\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{24}=1 \quad , \quad a^2=40 \quad , \quad b^2=24$ ((سينات))

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}$$

$$c=\sqrt{40-24}=\sqrt{16}$$

$$c=4$$

القطع الزائد:

$C_{\text{زائد}} = C_{\text{ناقص}} \Rightarrow c=4$

$$\frac{2a}{2c}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{4}=\frac{1}{2} \Rightarrow [2a=4]\div 2$$

$$a=2$$

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b=\sqrt{c^2-a^2}$$

$$b=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}$$

$$b^2=12$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$$

**سؤال 3** جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطعين المكافئين $y^2 = 20x$ , $y^2 = -20x$ والفرق بين طولي محوريه الحقيقي والمرافق يساوي (2) وحدة.

القطع المكافئ: $y^2 = 20x$

$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 20] \div 4 \Rightarrow P = 5, F(5,0)$

$y^2 = -20x$

$y^2 = -4Px \Rightarrow [4P = 20] \div 4 \Rightarrow P = 5, F(-5,0)$

القطع الزائد:

$\underset{\text{زائد}}{C} = \underset{\text{مكافئ}}{P} \Rightarrow c = 5$

الفرق بين طولي محوريه الحقيقي والمرافق

$[2a - 2b = 2] \div 2$

$a - b = 1 \Rightarrow a = 1 + b$ .........(1)

تعويض

$c^2 = a^2 + b^2$

مربع حدانية

$(5)^2 = (1+b)^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 1 + 2b + b^2 + b^2$

$2b^2 + 2b + 1 - 25 = 0$

$[2b^2 + 2b - 24 = 0] \div 2$

$b^2 + b - 12 = 0$

$(b+4)\ (b-3) = 0$

$b + 4 = 0$ لا يمكن ان تكون سالبة لذلك يُهمل أما أو

$b - 3 = 0 \Rightarrow b = 3$ نعوض في معادلة (1)

$a = 1 + b = 1 + 3 \Rightarrow a = 4$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

**ملاحظة** حرف العطف (و) في اللغة العربية ((الفرق بين طولي محوريه الحقيقي والمرافق)) تحمل وجهين:

الأول ← $2a - 2b = 2$

الثاني ← $2b - 2a = 2$

تم حل السؤال على الاحتمال الأول وسنتطرق الى الوجه الثاني من الحل.

$[2b - 2a = 2] \div 2$

$b - a = 1 \Rightarrow b = 1 + a$ ........(1)

$c^2 = a^2 + b^2$

$(5)^2 = a^2 + (1+a)^2$

مربع حدانية

$25 = a^2 + 1 + 2a + a^2$

$2a^2 + 2a - 24 = 0 \div 2$

$a^2 + a - 12 = 0$

$(a+4)\ (a-3) = 0$

$a + 4 = 0$ لا يمكن ان تكون سالبة لذلك يُهمل

$a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3$

$b = 1 + a = 1 + 3 = 4$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

## سؤال 4

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما رأسا القطع الناقص $x^2 + 9y^2 = 36$ والنسبة بين طول محوره الحقيقي الى البعد بين بؤرتيه تساوي $\left(\frac{1}{2}\right)$ وينطبق محوره على المحورين الاحداثيين .

2002 - د (2)

القطع الناقص :

$$\left[x^2 + 9y^2 = 36\right] \div 36$$

$$\frac{x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad , \quad a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$$

القطع الزائد :

| بؤرتاه | هما | رأسا القطع الناقص |
|---|---|---|
| $c_{\text{زائد}}$ | = | $a_{\text{ناقص}}$ |

$c = 6$

$$\frac{2a}{2c} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow [2a = 6] \div 2$$

$$a = 3$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27}$$

$$b^2 = 27$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$$

## سؤال 5

جد معادلة القطع الزائد الذي يمر ببؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ والنسبة بين البعد بين بؤرتيه وطول محوره المرافق كنسبة $\frac{5}{4}$ .

القطع الناقص :

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$$

((سينات)) $a^2 = 49 \quad , \quad b^2 = 24$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{49 - 24} = \sqrt{25}$$

$$c = 5$$

القطع الزائد :

قال يمر وكل يمر a في القطع الزائد $\quad c_{\text{ناقص}} = a_{\text{زائد}}$

$$a = 5$$

$$\frac{2c}{2b} = \frac{5}{4} \quad [4c = 5b] \div 4 \Rightarrow c = \frac{5}{4}b \quad .....(1)$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\left(\frac{5}{4}b\right)^2 = (5)^2 + b^2$$

$$\left[\frac{25}{16}b^2 = 25 + b^2\right].16 \Rightarrow 25b^2 = 400 + 16b^2$$

$$25b^2 - 16b^2 = 400 \Rightarrow 9b^2 = 400$$

$$b^2 = \frac{400}{9}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{\frac{400}{9}} = 1$$

**سؤال 6** قطعان زائد وناقص كل منهما يمر ببؤرة الاخر جد معادلة القطع الزائد اذا علمت ان معادلة القطع الناقص هي $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ علماً ان محوريهما على المحورين الاحداثيين .

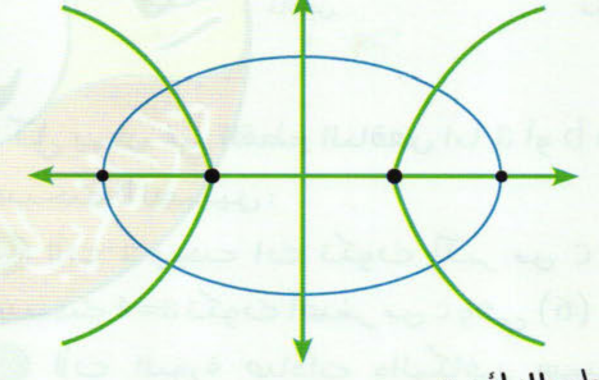
القطع الناقص: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

$a^2=25 \rightarrow a=5 \quad , \quad b^2=9 \rightarrow b=3$

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}$

$c=\sqrt{16} \Rightarrow c=4$

رسم توضيحي



القطع الزائد :

للزائد $\underset{\text{زائد}}{a} = \underset{\text{ناقص}}{c} \Rightarrow a=4$

للزائد $\underset{\text{زائد}}{c} = \underset{\text{ناقص}}{a} \Rightarrow c=5$

$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}$

للزائد $b=3$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

**سؤال 7** جد معادلة القطع المخروطي الذي محوراه هما المحورين الاحداثيين وإحدى بؤرتيه $(-5,0)$ وأحد رأسيه $(3,0)$ .

2004 - د (2) | 2005 - تمهيدي | 2006 - د (2) | 2008 - د (2) | 2014 - د (3)

البؤرة $(-5,0) \rightarrow c=5$

الرأس $(3,0) \rightarrow a=3$

$a<c$ ((أصغر)) أي ان القطع زائد

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b=\sqrt{c^2-a^2}$

$b=\sqrt{25-9}=\sqrt{16} \Rightarrow b=4$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

**سؤال 8** جد معادلة القطع الزائد الذي إحدى بؤرتيه نقطة تقاطع المستقيم $2x-y=8$ مع محور السينات وطول محوره محوره التخيلي (4) وحدات .

2007 تمهيدي

(نقطة التقاطع مع محور السينات) $y=0$

$2x-0=8 \Rightarrow [2x=8]\div 2 \Rightarrow x=4$

$(4,0) \rightarrow \quad , \quad c=4$

طول محوره التخيلي $=2b \Rightarrow [2b=4]\div 2$

$b=2$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow a=\sqrt{c^2-b^2}$

$a=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}$

$a^2=12$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$

**سؤال 9** جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطعين المكافئين $y^2 = 20x$ , $y^2 = -20x$ وطول محوره المرافق (8) وحدات.

2005 - د (1) 2008 - د (1) 2015 - د (4) رصافة

موقع طلاب العراق
WWW.iQ-RES.COM

القطع المكافئ:

$y^2 = 20x$

$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 20] \div 4 \Rightarrow P = 5$

$F(5, 0)$

$y^2 = -20x$

$y^2 = -4Px \Rightarrow 4P = 20 \div 4 \Rightarrow P = 5$

$F(-5, 0)$

القطع الزائد: $P = c \Rightarrow c = 5$

طول محوره التخيلي $= 2b \Rightarrow [2b = 8] \div 2$

$b = 4$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2}$

$a = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9}$

$a = 3$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

**سؤال 10** جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الزائد $8y^2 - x^2 = 32$ ويمس دليل القطع المكافئ $y^2 + 16x = 0$ .

2006 - د (1)
2016 - د (2)

القطع الزائد:

$[8y^2 - x^2 = 32] \div 32 \Rightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{32} = 1$

$a^2 = 4, \; b^2 = 32 \;, c = ?$

$c^2 = a^2 + b^2$

بالجذر

$c^2 = 4 + 32 \Rightarrow c^2 = 36 \Rightarrow c = 6$

القطع المكافئ:

$y^2 = -16x$

$y^2 = -4Px \Rightarrow [4P = 16] \div 4$

$P = 4$

القطع الناقص بؤرتاه هما بؤرتي القطع الزائد

$c_{\text{زائد}} = c_{\text{ناقص}} \Rightarrow c = 6$

$P_{\text{مكافئ}} = b_{\text{ناقص}} \Rightarrow b = 4$

* كل يمس في القطع الناقص اما a أو b هنا اصبحت b لسببين:

1. لأن a يجب ان تكون أكبر من c إذا اصبحت a=4 تكون أصغر من c وهي (6).
2. لأن البؤرة صادات والمكافئ سينات والذي يخالف البؤرة هو قطب b

$a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 = 4^2 + 6^2$

$a^2 = 16 + 36 \Rightarrow a^2 = 52$

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{52} = 1$

**سؤال 11** جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل والبعد بين بؤرتيه (8) وحدات ورأساه بؤرتا القطع الزائد $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ .

2007 - د (1)

القطع الزائد :

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

$a^2=16 \quad , \quad b^2=9$ سينات

$$c^2=a^2+b^2$$

$$c^2=16+9 \Rightarrow c^2=25 \Rightarrow c=5$$

القطع الناقص :

$$\underset{\text{ناقص}}{a}=\underset{\text{زائد}}{c} \Rightarrow a=5$$

البعد بين بؤرتيه $=2c \Rightarrow [2c=8]\div 2$

$$c=4$$

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow b=\sqrt{a^2-c^2}$$

$$b=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}$$

$$b=3$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

**سؤال 12** جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما رأسا القطع الناقص $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ وطول محوره الحقيقي (12) وحدة وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين .

2007 خارج القطر

القطع الناقص :

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1 \qquad a^2=100 \Rightarrow a=10$$

$$V_1(10,0), V_2(-10,0)$$

القطع الزائد :

| القطع الزائد بؤرتاه | هما | رأسا القطع الناقص |
|---|---|---|
| $c$ | $=$ | $a$ |

للزائد $c=10$

طول محوره الحقيقي $=2a \Rightarrow [2a=12]\div 2$

للزائد $a=6$

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b=\sqrt{c^2-a^2}$$

$$b=\sqrt{100-36}$$

$$b=\sqrt{64} \Rightarrow b=8$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$$

## سؤال 13

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ والنسبة بين طول محوره الحقيقي الى البعد بين بؤرتيه تساوي $\left(\frac{1}{2}\right)$

2008 تمهيدي

القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1 \quad , \; a^2=25 ,\; b^2=9 ,\; c=?$$

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}$$

$$c=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}$$

للقطع الناقص $c=4$

القطع الزائد:

| بؤرتاه | تنطبقان | على بؤرتي القطع الناقص |
|---|---|---|
| $c_{\text{زائد}}$ | = | $c_{\text{ناقص}}$ |

$c=4$

$$\frac{\text{طول محوره الحقيقي}}{\text{البعد بين بؤرتيه}}=\frac{2a}{2c}\Rightarrow\frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}c}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{4}=\frac{1}{2}\Rightarrow[2a=4]\div 2$$

للزائد $a=2$

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b=\sqrt{c^2-a^2}$$

$$b=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}$$

$$b^2=12$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$$

## سؤال 14

جد معادلة القطع الناقص الذي يمر ببؤرتي القطع الزائد $9y^2-16x^2=144$ ويقطع من محور السينات جزءاً طوله 12 وحدة .

2009 - د (1)

القطع الزائد :

$$\left[9y^2-16x^2=144\right]\div 144$$

$$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1 \quad a^2=16 \;,\; b^2=9 \quad \text{صادات}$$

$$c^2=a^2+b^2$$

$$c^2=16+9$$

$$c^2=25\rightarrow c=5\rightarrow F_1\;(0,5),F_2\;(0,-5)$$

القطع الناقص:

القطع الناقص يمر من بؤرة الزائد $(0,5)$

$a=5$ أو $b=5$

الجزء المقطوع يمر من محور السينات

أما $[2a=12]\div 2 \qquad a=6$

أو $[2b=12]\div 2 \qquad b=6$

الأكبر $a \leftarrow a=6$ سينات

الأصغر $b \leftarrow b=5$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1}$$

**سؤال 15** جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $25x^2 + 9y^2 = 225$ ويمس دليل القطع المكافئ الذي معادلته $x^2 + 8y = 0$ .

2015 - د (3)

**القطع الناقص:**

$$\left[25x^2 + 9y^2 = 225\right] \div 225$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1 \quad , \quad a^2 = 25 , b^2 = 9$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{25-9} = \sqrt{16}$$

$$c = 4$$

**القطع المكافئ:**

$$x^2 = -8y$$

$$x^2 = -4Py \Rightarrow \left[4P = 8\right] \div 4$$

$$P = 2$$

**القطع الزائد:**

$$\underset{\text{ناقص}}{c} = \underset{\text{زائد}}{c} \Rightarrow c = 4$$

$$\underset{\text{مكافئ}}{P} = \underset{\text{زائد}}{a} \Rightarrow a = 2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{16-4} = \sqrt{12}$$

$$b^2 = 12$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1}$$

**سؤال 16** جد معادلة القطع المخروطي الذي رأسه نقطة الأصل وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين واختلافه المركزي يساوي (3) ويمر بالنقطة $(0,2)$ .

2016 تمهيدي

* القطع زائد لأن $e > 1$

الاختلاف المركزي أكبر من (1)

$$(0,2) \rightarrow a = 2 \quad \text{(رأس صادات)}$$

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{3}{1} = \frac{c}{2}$$

$$c = 6$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{36-4}$$

$$b = \sqrt{32} \Rightarrow b^2 = 32$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{32} = 1}$$

قال الشاعر:

دعْ حبَّ أو من كلفتَ بحبهِ
ما الحبُّ إلا للحبيبِ الأخر
ما قد تولى لا ارتجاع لطيبه
هل غائبُ اللذاتِ مثل الحاضرِ

## سؤال 17

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه تقعان على محور السينات ومجموع طولي محوريه يساوي (18) وحدة وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الزائد $x^2 - 2y^2 = 6$ .

القطع الزائد : $[x^2 - 2y^2 = 6] \div 6$

2014 نازحين

$\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1 \quad , \quad a^2 = 6 , b^2 = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 6 + 3$

$c^2 = 9 \rightarrow c = 3$

القطع الناقص:

$c_{\text{زائد}} = c_{\text{ناقص}}$

$c = 3$

مجموع طولي محوريه $[2a + 2b = 18] \div 2$

$a + b = 9 \Rightarrow a = 9 - b \quad ..........(1)$

$a^2 = b^2 + c^2$

$(9 - b)^2 = b^2 + (3)^2$

$81 - 18b + \cancel{b^2} = \cancel{b^2} + 9 \Rightarrow 18b = 81 - 9$

$[18b = 72] \div 18 \Rightarrow b = 4$

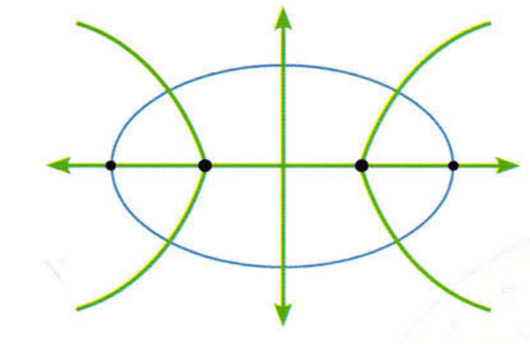
$a = 9 - b$

$a = 9 - 4 \Rightarrow a = 5$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1}$

## سؤال 18

جد معادلة القطع الزائد والناقص اذا كان كل منهما يمر ببؤرتي الاخر وكلاهما تقعان على محور السينات وطول المحور الكبير يساوي $6\sqrt{2}$ وحدة طول وطول المحور الحقيقي يساوي (6) وحدة طول .



القطع الزائد : $[2a = 6] \div 2$

$a = 3$ زائد

القطع الناقص: $[2a = 6\sqrt{2}] \div 2$

$a = 3\sqrt{2}$ ناقص

$a_{\text{زائد}} = c_{\text{ناقص}} \rightarrow c = 3$ ناقص

$a_{\text{ناقص}} = c_{\text{زائد}} \rightarrow c = 3\sqrt{2}$ زائد

| الزائد | الناقص |
|---|---|
| $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ | $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ |
| $b = \sqrt{18 - 9} = \sqrt{9}$ | $b = \sqrt{18 - 9} = \sqrt{9}$ |
| $b = 3$ | $b = 3$ |
| $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ |
| $\boxed{\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1}$ | $\boxed{\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{9} = 1}$ |

**سؤال 19** عيّن النقاط على القطع الزائد الذي معادلته $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{1}=1$ والتي تبعد من البؤرة في الفرع الايمن بمقدار $\frac{1}{\sqrt{3}}$ وحدة.

2005 - د (2)

$$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{1}=1 \Rightarrow a^2=3\ ,\ b^2=1\ ,\ c=?$$

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=3+1$$

$$c^2=4$$

$$c=2$$

$$F_1\overset{x_1\ ,y_1}{(2,0)} \qquad P\overset{x_2\ ,y_2}{(x,y)}$$

$$PF_1=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}$$ بالتربيع

$$\frac{1}{3}=(x-2)^2+y^2$$ مربع حدانية

$$\left[\frac{1}{3}=x^2-4x+4+y^2\right].3$$

$$1=3x^2-12x+12+3y^2$$

$$3x^2+3y^2-12x+11=0 \quad .........(1)$$

نتخلص من $y^2$ ونجدها من معادلة القطع

$$\frac{x^2}{3}-y^2=1 \Rightarrow y^2=\frac{x^2}{3}-1 \quad .........(2)$$

$$3x^2+3\left(\frac{x^2}{3}-1\right)-12x+11=0$$

$$3x^2+x^2-3-12x+11=0$$

$$\left[4x^2-12x+8=0\right]\div 4$$

$$x^2-3x+2=0$$

$$(x-1)(x-2)=0$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

عندما $x=1$ $\quad y^2=\frac{x^2}{3}-1$

$$y^2=\frac{1}{3}-1=\frac{-2}{3}$$ يُهمل $\notin R$

عندما $x=2$

بالجذر $\quad y^2=\frac{2^2}{3}-1 \Rightarrow y^2=\frac{1}{3}$

توحيد مقامات

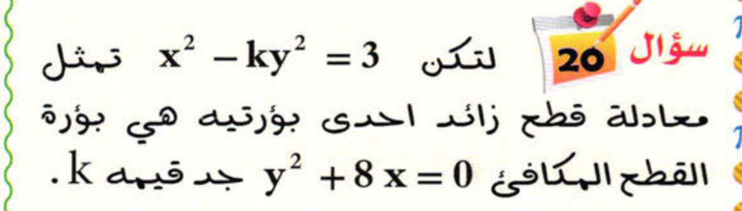
$$y=\mp\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$P_1\left(2,\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad P_2\left(2,\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

إستراحة شعرية:

وهواك في قلب الظنون حقيقة
لا ريب فيه وحبُ غيرك باطلُ

إن كان حبك في الفؤاد فريضةٌ
فسواك في شرعِ الغرام نوافلُ



**سؤال 20** لتكن $x^2 - ky^2 = 3$ تمثل معادلة قطع زائد احدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 8x = 0$ جد قيمه $k$.

2007 - د (1)

القطع المكافئ :

$$y^2 = -8x$$

$$y^2 = -4Px \Rightarrow \left[4P = 8\right] \div 4$$

$$P = 2$$

القطع الزائد :

$$\underset{\text{زائد}}{c} = \underset{\text{مكافئ}}{P}$$

$$c = 2$$

$$\left[x^2 - ky^2 = 3\right] \div 3 \Rightarrow \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{\frac{3}{k}} = 1$$

$$a^2 = 3 \quad , \quad b^2 = \frac{3}{k} \quad , \quad c = 2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$(2)^2 = 3 + \frac{3}{k}$$

$$4 = 3 + \frac{3}{k} \Rightarrow 4 - 3 = \frac{3}{k} \Rightarrow 1 = \frac{3}{k}$$

$$\boxed{k = 3}$$

---

**سؤال 21** لتكن $5y^2 - 4x^2 = h$ معادلة قطع زائد واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $4y - 5x^2 = 0$ جد قيمه $h$.

2003 - د (1)

القطع المكافئ :

$$4y - 5x^2 = 0$$

$$\left[5x^2 = 4y\right] \div 5$$

$$x^2 = \frac{4}{5}y$$

$$x^2 = \frac{4}{5}y$$

$$x^2 = 4Py \Rightarrow \left[4P = \frac{4}{5}\right] \div 4$$

$$P = \frac{\cancel{4}}{\cancel{4} \times 5} \Rightarrow P = \frac{1}{5}$$

القطع الزائد :

$$\underset{\text{مكافئ}}{P} = \underset{\text{زائد}}{c} \Rightarrow c = \frac{1}{5}$$

$$\left[5y^2 - 4x^2 = h\right] \div h$$

$$\frac{y^2}{\frac{h}{5}} - \frac{x^2}{\frac{h}{4}} = 1$$

$$a^2 = \frac{h}{5} \quad , \quad b^2 = \frac{h}{4} \quad , \quad c = \frac{1}{5}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{h}{5} + \frac{h}{4}$$ توحيد مقامات

$$\frac{1}{25} = \frac{4h + 5h}{20} \Rightarrow \frac{1}{25} = \frac{9h}{20}$$

$$h = \frac{\overset{4}{\cancel{20}}}{9 \times \underset{5}{\cancel{25}}} \Rightarrow h = \frac{4}{45}$$

## النوع الثالث من الأسئلة (انسحاب محاور القطع الزائد)

### * قطع زائد محوره الحقيقي يوازي محور (x)

المعادلة

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

المركز:

$o\,(h,k)$

الرأسان:

$\overline{V}_1\,(a+h,k)$ $\quad \overline{V}_2\,(-a+h,k)$

البؤرتان:

$\overline{F}_1\,(c+h,k)$ $\quad \overline{F}_2\,(-c+h,k)$

### * قطع زائد محوره الحقيقي يوازي محور (y)

المعادلة

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

المركز:

$o\,(h,k)$

الرأسان:

$\overline{V}_1\,(h,a+k)$ $\quad \overline{V}_2\,(h,-a+k)$

البؤرتان:

$\overline{F}_1\,(h,c+k)$ $\quad \overline{F}_2\,(h,-c+k)$

### خطوات حل السؤال

1. نحدد $(a^2)$ و $(b^2)$ من المعادلة و $a^2$ هو دائماً في المقام الأول .
2. نستخدم قانون $c^2 = a^2 + b^2$ لايجاد قيمة (c) .
3. نجد $(h, k)$ .
4. نجد المركز والرأسان والبؤرتان حسب القانون الوارد اعلاه .
5. $2a$ = طول المحور الحقيقي
   $2b$ = طول المحور الحقيقي
6. قانون الاختلاف المركزي نفسه $\left(e=\frac{c}{a}\right)$



**مثال 1** جد احداثيا المركز والرأسين وطول المحورين والاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته:

$$\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

$$a^2=9 \Rightarrow a=3$$

$$b^2=4 \Rightarrow b=2$$

$$c^2=a^2+b^2$$

بالجذر $c^2=9+4=13 \Rightarrow c=\sqrt{13}$

$$h=-2 \quad , \quad k=1$$

1. المركز: $o\ (h,k) \Rightarrow (-2,1)$
2. البؤرتان: $\bar{F}_1\ (c+h,k) \Rightarrow \bar{F}_1(\sqrt{13}-2\ ,\ 1)$

   $\bar{F}_2\ (-c+h,k) \Rightarrow \bar{F}_2(-\sqrt{13}-2\ ,\ 1)$
3. الرأسان: $\bar{V}_1(a+h,k) \Rightarrow \bar{V}_1(3-2\ ,\ 1) \Rightarrow \bar{V}_1\ (1\ ,\ 1)$

   $\bar{V}_2(-a+h,k) \Rightarrow \bar{V}_2(-3-2\ ,\ 1) \Rightarrow \bar{V}_2(-5\ ,\ 1)$
4. طول المحور الحقيقي $= 2a = 6$ وحدة
5. طول المحور المرافق $= 2b = 4$ وحدة
6. الاختلاف المركزي: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{3} > 1$

**مثال 2** عين المركز وبؤرتا ورأسا القطع الزائد الاتي ثم جد طول كل من المحورين والاختلاف المركزي:

$$2\,(y+1)^2-4\,(x-1)^2=8 \div 8$$

$$\left[2\,(y+1)^2-4\,(x-1)^2=8\right] \div 8$$

$$\frac{(y+1)^2}{4}-\frac{(x-1)^2}{2}=1$$

$$a^2=4 \Rightarrow a=2$$

$$b^2=2 \Rightarrow b=\sqrt{2}$$

$$c^2=a^2+b^2$$

بالجذر $c^2=4+2=6 \Rightarrow c=\sqrt{6}$

$$k=-1 \quad , \quad h=1$$

1. المركز: $o\ (h,k) = (1\ ,-1)$
2. البؤرتان: $\bar{F}_1\ (h,c+k) \Rightarrow (1,\ \sqrt{6}-1)$

   $\bar{F}_2\ (h,-c+k) \Rightarrow (1,\ -\sqrt{6}-1)$
3. الرأسان: $\bar{V}_1(h,a+k) \Rightarrow \bar{V}_1(1\ ,2-1) \Rightarrow \bar{V}_1(1\ ,\ 1)$

   $\bar{V}_2(h,-a+k) \Rightarrow \bar{V}_2(1,\ -2-1) \Rightarrow \bar{V}_2(1\ ,\ -3)$
4. طول المحور الحقيقي $= 2a = 4$ وحدة
5. طول المحور المرافق $= 2b = 2\sqrt{2}$ وحدة
6. الاختلاف المركزي: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{2} > 1$

**مثال 3** جد البؤرتين والرأسين والمركز وطول المحورين للقطع الزائد الذي معادلته :

$$16x^2 + 160x - 9y^2 + 18y = 185$$

$(16x^2 + 160x) + (-9y^2 + 18y) = 185$

$16\ (x^2 + 10x) - 9\ (y^2 - 2y) = 185$

$16\ (x^2 + 10x + 25) - 9\ (y^2 - 2y + 1)\ = 185 + 400 - 9$

$\left[16\ (x^2 + 5)^2 - 9\ (y^2 - 1)^2 = 576\right] \div 576$

$\frac{(x+5)^2}{36} - \frac{(y-1)^2}{64} = 1$

$a^2 = 36 \ \Rightarrow \ a = 6$

$b^2 = 64 \ \Rightarrow \ b = 8$

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 36 + 64 = 100 \ \overset{\text{بالجذر}}{\Rightarrow} \ c = 10$

$h = -5 \ , \ k = 1$




1 المركز: $o\ (h,k) \ \Rightarrow \ (-5\ ,\ 1)$

2 البؤرتان: $\bar{F}_1\ (c+h,k) \Rightarrow \bar{F}_1\ (10\ -5\ ,\ 1) \ \Rightarrow \ \bar{F}_1\ (5\ ,\ 1)$

$\bar{F}_2\ (-c+h,k) \Rightarrow \bar{F}_2\ (-10\ -5\ ,\ 1) \Rightarrow \bar{F}_2\ (-15\ ,\ 1)$

3 الرأسان: $\bar{V}_1\ (a+h,k) \ \Rightarrow \ \bar{V}_1\ (6\ -5\ ,1) \ \Rightarrow \ \bar{V}_1\ (1\ ,\ 1)$

$\bar{V}_2\ (-a+h,k) \Rightarrow \ \bar{V}_2\ (-6-5\ ,\ 1) \Rightarrow \ \bar{V}_2\ (-11\ ,\ 1)$

4 طول المحور الحقيقي $= \ 2a = 12$ وحدة

5 طول المحور المرافق $= \ 2b = 16$ وحدة



6 الاختلاف المركزي: $e = \frac{c}{a} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} = \ > 1$

WWW.iQ-RES.COM
الموقع التعليمي الاول على مستوى العراق

( ... شارك رابط موقعنا ... )
مع اصدقائك لتعم الفائدة
ولا تنسونا من صالح دعائكم







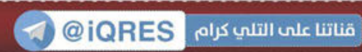



كل ما ينشر في موقعنا من محتوى هو مجاني ولخدمة الطالب العراقي

© WWW.iQ-RES.COM

# 6 Th Scientific







موقع طلاب العراق

2019

The Master
## Haidar Walid
07701780364




Part One

Warning :-

We warn against reproducing them, and it is not permissible to do so because they are legitimate, legal, unjustified and quire Books and documents Note that our lieutenant has a trademark from the Ministry of Industry Department of Industrial Development and Organization considered forged.